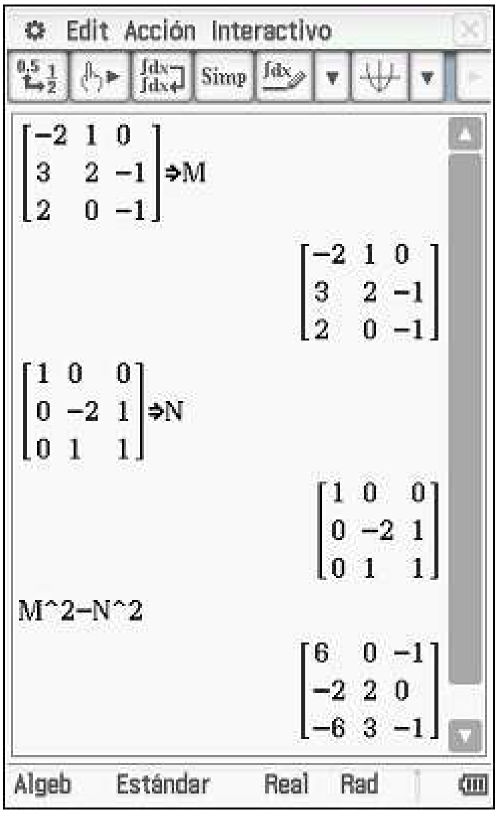
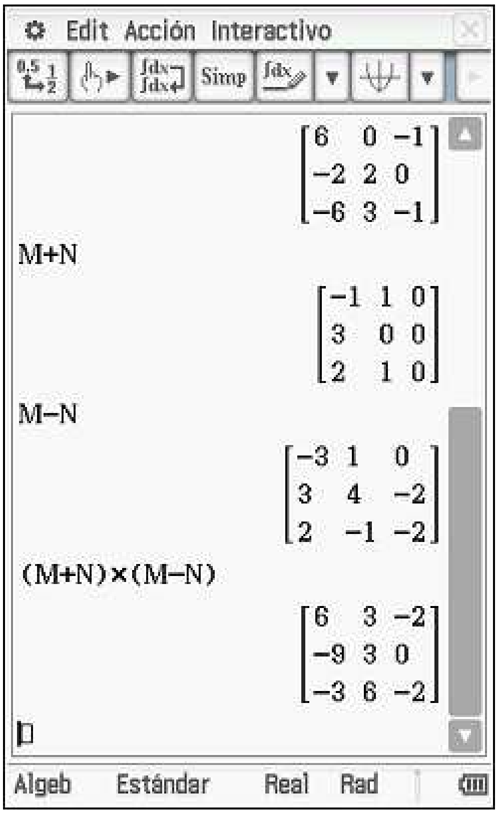
MATRIUS

PREGUNTA 1.-





L'explicació de que aquesta identitat notable no siga necessàriament certa per a matrius és deguda a la no commutativitat del producte de matrius.

Així es té que:

$$(M+N)(M-N) = M^2 + NM - MN - N^2$$

Com que no necessàriament $NM = MN$ no podrem simplificar aquets factors i per tant no es té que necessàriament la igualtat acabe sent $M^2 - N^2$

PREGUNTA 2.-
a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & \lambda+1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$ observa les dues primeres columnes. Són proporcionals.

Aleshores $ran(A) = ran\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & \lambda+1 & \lambda-4 \end{pmatrix} = ran\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ \lambda+1 & 5 & \lambda-4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ \lambda+1 & 5 & \lambda-4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F2 \to F2 - F1 \\ F3 \to -F3 + (\lambda+1)F1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda-3 & -3\lambda+2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to F3 \to -F3 + (2\lambda-3)F2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5\lambda-5 \end{pmatrix}$$

Aleshores es té que si $\begin{cases} \lambda \neq 1 & \to & ran(A) = 3 \\ \lambda = 1 & & ran(A) = 2 \end{cases}$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ calculem el rang de la matriu

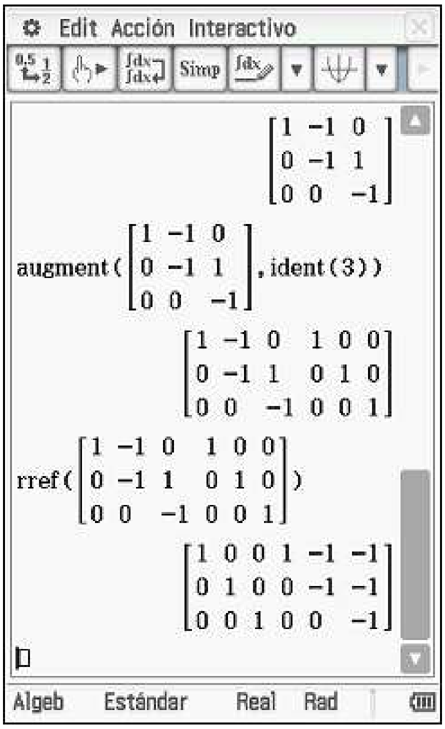
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \to F3 \to -F3 + \alpha F1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to F3 \to F3 - \alpha F2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Aleshores es té que si $\begin{cases} \alpha \neq 1 & \to & ran(B) = 3 \\ \alpha = 1 & & ran(B) = 2 \end{cases}$

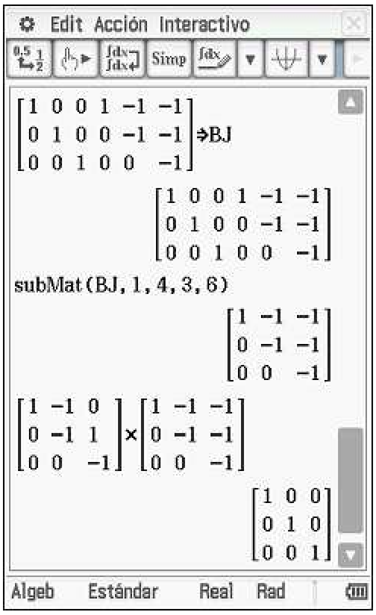
Si $\alpha = 0$ estem en el cas que el rang és tres i per tant la matriu invertible.

Calculem la inversa a partir de l'algoritme de Gauss-Jordan



La matriu inversa buscada és $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ho comprovem



PREGUNTA 3.-

Analitzem els rangs de les matrius A i B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad F2 \rightarrow F2 - F1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow ranA = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad F2 \rightarrow 2F2 - F1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow ranB = 2$$

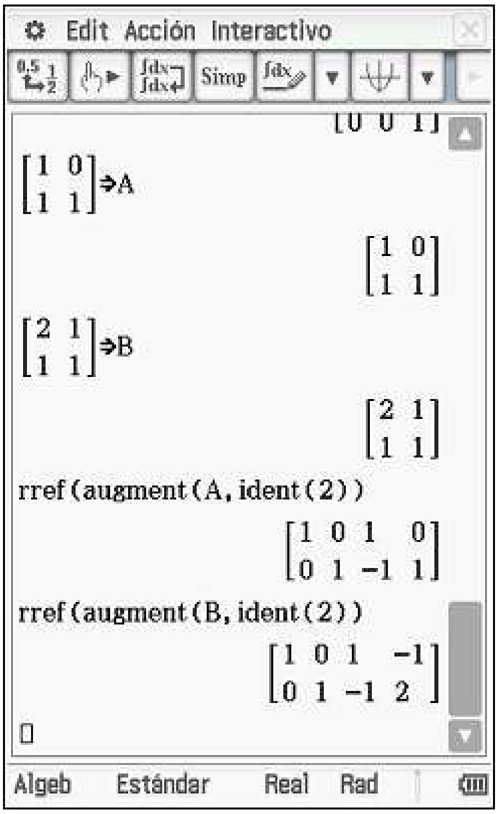
Les dues matrius són invertibles

Podem procedir de la forma següent per a calcular X

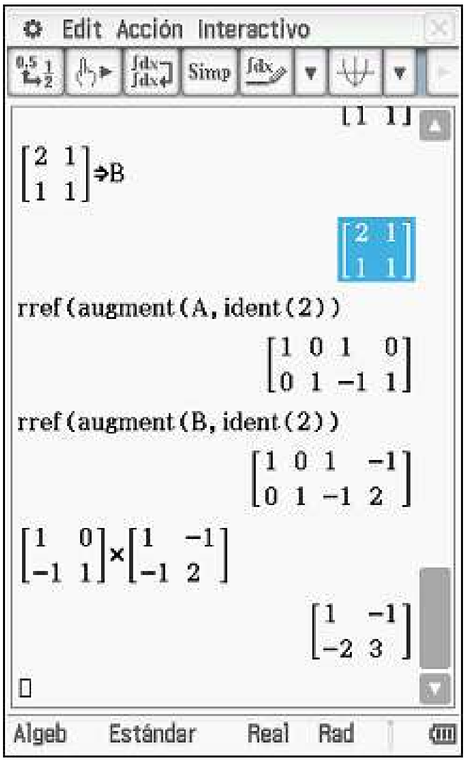
$$A \bullet X \bullet B = I \quad \rightarrow \quad A^{-1} \bullet A \bullet X \bullet B = A^{-1} \bullet I \quad \rightarrow \quad X \bullet B = A^{-1} \bullet I$$

$$X \bullet B \bullet B^{-1} = A^{-1} \bullet I \bullet B^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \bullet I \bullet B^{-1} = A^{-1} \bullet B^{-1}$$

Calculem les matrius inverses amb Gauss-Jordan



I ara fem el producte $A^{-1} \cdot B^{-1}$



La matriu buscada és $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Comprovem el resultat: