

MATRIUS

PREGUNTA 1.-

The image shows two screenshots of a mathematical software interface, likely a graphing calculator or CAS, demonstrating matrix operations. Both windows have a title bar "Edit Acción Interactivo" and a toolbar with icons for fractions, matrices, simplification, and other functions.

Left Window:

- Matrix M: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow M$
- Matrix N: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow N$
- Matrix M+N: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Matrix M-N: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Expression: $M^2 - N^2$

Right Window:

- Matrix M+N: $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
- Matrix M-N: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Expression: $(M+N) \times (M-N)$
- Result: $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

L'explicació de que aquesta identitat notable no siga necessàriament certa per a matrius és deguda a la no commutativitat del producte de matrius.

Així es té que:

$$(M + N)(M - N) = M^2 + NM - MN - N^2$$

Com que no necessàriament $NM = MN$ no podrem simplificar aquets factors i per tant no es té que necessàriament la igualtat acabe sent $M^2 - N^2$

PREGUNTA 2.-

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & \lambda + 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \text{ observa les dues primeres columnes. Són proporcionals.}$$

$$\text{Aleshores } \text{ran}(A) = \text{ran} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & \lambda + 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ \lambda + 1 & 5 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ \lambda + 1 & 5 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} F2 \rightarrow F2 - F1 \\ F3 \rightarrow -F3 + (\lambda + 1)F1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 3 & -3\lambda + 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow F3 \rightarrow -F3 + (2\lambda - 3)F2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5\lambda - 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aleshores es té que si } \begin{cases} \lambda \neq 1 & \rightarrow \text{ran}(A) = 3 \\ \lambda = 1 & \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{cases}$$

b)

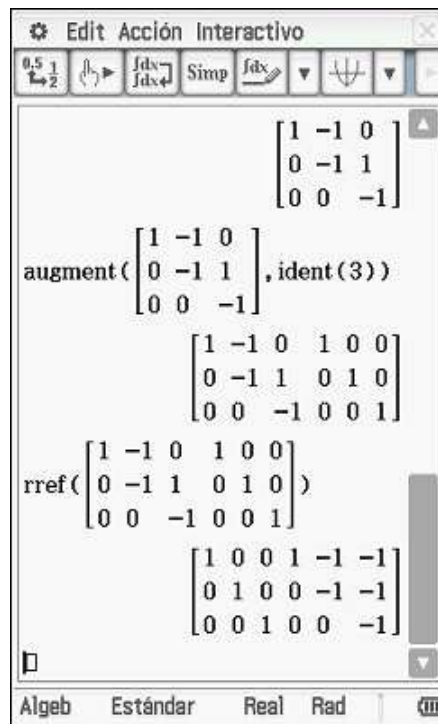
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ calculem el rang de la matriu}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F3 \rightarrow -F3 + \alpha F1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow F3 \rightarrow F3 - \alpha F2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Aleshores es té que si } \begin{cases} \alpha \neq 1 & \rightarrow \text{ran}(B) = 3 \\ \alpha = 1 & \rightarrow \text{ran}(B) = 2 \end{cases}$$

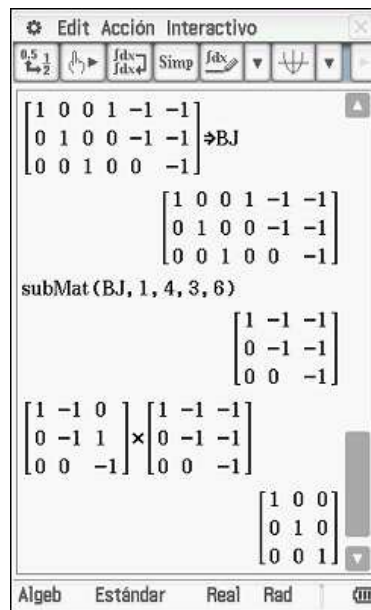
Si $\alpha = 0$ estem en el cas que el rang és tres i per tant la matriu invertible.

Calculem la inversa a partir de l'algoritme de Gauss-Jordan



La matriu inversa buscada és $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ho comprovem



PREGUNTA 3.-

Analitzem els rangs de les matrius A i B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F2 \rightarrow F2 - F1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}A = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F2 \rightarrow 2F2 - F1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}B = 2$$

Les dues matrius són invertibles

Podem procedir de la forma següent per a calcular X

$$A \cdot X \cdot B = I \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot I \quad \rightarrow \quad X \cdot B = A^{-1} \cdot I$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

Calculem les matrius inverses amb Gauss-Jordan

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B$
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rref}(\text{augment}(A, \text{ident}(2)))$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rref}(\text{augment}(B, \text{ident}(2)))$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Algeb Estándar Real Rad

ara fem el producte $A^{-1} \cdot B^{-1}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B$
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rref}(\text{augment}(A, \text{ident}(2)))$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rref}(\text{augment}(B, \text{ident}(2)))$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Algeb Estándar Real Rad

La matriu buscada és $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Comprovem el resultat:

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface with the following content:

- Header: Edit Acción Interactivo
- Toolbar: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x}$, $\int dx$, $\int dx$, $\int dx$, $\int dx$, $\int dx$, $\int dx$, $\int dx$
- Input: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Command: $\text{rref}(\text{augment}(A, \text{ident}(2)))$
- Output: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- Command: $\text{rref}(\text{augment}(B, \text{ident}(2)))$
- Output: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
- Equation: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- Output: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
- Equation: $A \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times B$
- Output: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Bottom bar: Algeb Estándar Real Rad $\frac{1}{x}$