Tema 2.- DETERMINANTS

PREGUNTA 1

a) Resol l' equació:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

a) Desenvolupem el determinant i igualem a zero:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

b) Calcula el valor del determinant, i dona el resultat factoritzat:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 1 \\ a+2 & a & 1 & 0 \\ a+2 & 1 & a & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (a+2)\, a \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)\, a \left[(a-1)^2 - 1 \right] = (a+2)\, a \left(a^2 - 2a \right) =$$

$$= (a+2)\, a^2 (a-2) = a^2 (a+2)(a-2)$$

(1) Sumar a la 1 columna les altres.

(2) Traure (2) factor comú.

(3) Restar la 1 columna a la 2 i a la 4

(4) Desenvolupar per la 1 fila.

(5) Desenvolupar per la 2 fila.

PREGUNTA 2

a) **Determina el rang de la matriu segons els valors de a:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Podem prescindir de la 4 columna, ja que no influeix en el rang.

Tomemos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Aleshores, *ran(A)* ≥ 2.

Busquem els valors de a que fan zero el determinant format per les tres primeres columnes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix}=a^2+4a+3=0 \quad\rightarrow\quad a=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2} \quad \begin{cases} a=-1 \\ a=-3 \end{cases}$$

- Si $a\neq -1$ y $a\neq -3 \quad\rightarrow\quad ran(A)=3$
- Si $a=-1$ o $a=-3$ $\rightarrow$ La 2ª fila depende linealmente de las otras dos $\rightarrow$ $ran(A)=2$

b) Calcula per a quins valors del paràmetre existeix la inversa de la matriu:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \lambda & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \lambda & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$ **i calcula la inversa quan el paràmetre és zero**

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A|\neq 0$.

Calculem el determinant de

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix}=2\lambda^2+4\lambda-1+2\lambda+\lambda^2+4=3\lambda^2+6\lambda+3=3(\lambda+1)^2$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad 3(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

Por tanto, existe A^{-1} para $\lambda \neq -1$.

Per a **λ**=0, la matriu és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 3

a) Justifica si ran(A) · ran(B) = ran(A·B)

FALS. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1 \text{ y } |B| = -3$$

Como det(A) ≠ 0 i det(B) ≠ 0 → *ran(A)* = 2 i *ran(B) = 2*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A \cdot B) = 2$$

Aleshores:

ran(A) · ran(B) = 2 · 2 = 4 ≠ 2 = ran(A·B)

b) Siga A una matriu quadrada d'ordre 2 tal que $A^3 = 2A^2$. Demostra que *det(A)* = 0 o *det(A)* = 4.

$$\left.\begin{array}{l} |A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3 \\ |2A^2| \overset{(1)}{=} 4|A^2| = 4 \cdot |A \cdot A| = 4 \cdot |A| \cdot |A| = 4 \cdot |A|^2 \end{array}\right\}$$

$$A^3 = 2A^2 \rightarrow \left|A^3\right| = \left|2A^2\right| \rightarrow \left|A^3\right| = 4\cdot\left|A\right|^2 \rightarrow \left|A\right|^3 - 4\left|A\right|^2 = 0 \rightarrow \left|A\right|^2\left(\left|A\right|-4\right) = 0 \begin{cases} \left|A\right| = 0 \\ \left|A\right| = 4 \end{cases}$$

(1) es una matriu d'ordre 2. (C_1 i C_2 són les seues columnes). Per a multiplicar un número per una matriu es multipliquen per eixe número tots els seus elements. Aleshores:

$$\left|2A^2\right| = \left|2c_1, 2c_2\right| = 2^2\left|c_1, c_2\right| = 2^2\cdot\left|A^2\right| = 4\cdot\left|A^2\right|$$

c) A i B són dos matrius 3x3 tals que $|A^{-1}| = 5$ i $|B| = 3$. Calcula, justificant la resposta el valor de $|B\text{-}^{1}|$, $|B\cdot A^t|$ i $|(B^t \cdot A)^{-1}|$

En aquest exercici cla aplicar les propietats següents:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$
$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$
$$|A| = |A^t|$$

Així tenim que:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{3}$$

$$|B\cdot A^t| = |B|\cdot|A^t| = |B|\cdot|A| = 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$|(B\cdot A^t)^{-1}| = \frac{1}{|(B\cdot A^t)|} = \frac{1}{|B|\cdot|A^t|} = \frac{1}{3\cdot\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$