EXERCICIS D'EXAMENS

Discutir i resoldre els sistemes, quan siga possible, segons els valors del paràmetre:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+\lambda z = 3 \\ x+y+2z = 2 \\ x+3y+4z = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z = 8 \\ 5x+4y+5z = 14 \\ 4x+3y+\lambda z = 11 \end{array}\right\}$

a) Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Per a discutir el sistema estudiarem els rangs d'aquestes matrius i aplicarem el teorema de Rouché-Fröbenius

- **Comencem amb la matriu** A

Si agafem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) \geq 2$ independentment del valor de λ

Analitzem ara $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$ i igualem a zero. $2\lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$

Ara estidiem els diferents cassos amb els quals ens podem trobar:

CAS 1: Si $\lambda \neq 3 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 3 = rang(\overline{A}) = n^{o}\ incògnites \quad \rightarrow \quad S.C.D.$

El podem resoldre utilitzant Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda-6}{2\lambda-6} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda-6}{2\lambda-6} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{2\lambda - 6} = 0$$

CAS 2: Si $\lambda = 3$

En aquest cas es té que $rang(A) = 2$ i anem a veure quin és el rang de la matriu ampliada

La matriu ampliada és per a $\lambda = 3$ $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Si ens fixem bé, la quarta columna és igual que la tercera. Aleshores el rang no variarà del que tenim per a la matriu A.

Tenim per tant, $rang(A) = rang(\overline{A}) = 2 < n^{o}\ incògnites \quad \rightarrow \quad S.C.I.$

El sistema de partida és aleshores equivalent al format per les dues primeres equacions (on està el menor d'ordre dos que havem calculat i ens ha donat diferent de zero)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + 4z = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

Podrem resoldre en funció d'un paràmetre (3 incògnites - 2 equacions = 1 paràmetre) aïllant una de les incògnites

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - 3z \\ x + y = 2 - 2z \end{array}\right\}$ i ara podem aplicar de nou Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 3z & 2 \\ 2 - 2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z - 1}{-1} = 1 - z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 3z \\ 1 & 2 - 2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z - 1}{-1} = 1 - z$$

Les solucions: $\left.\begin{array}{r} x = 1 - \delta \\ y = 1 - \delta \\ z = \delta \end{array}\right\}, \quad \delta \in \Re$