4.- SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

1.- El sistema lineal $\left.\begin{aligned} ax+y+z &= a^2 \\ x-y+z &= 1 \\ 3x-y-z &= 1 \\ 6x-y+z &= 3a \end{aligned}\right\}$

a) Es siempre compatible
b) Si $a = 2$ el sistema es incompatible
c) Si $a \neq 2$ el sistema es incompatible

Consideramos las matrices de coeficientes A y la ampliada $\overline{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix}$$

Analizamos los rangos.

Tomando el menor de A formado por las tres últimas filas se tiene:

$\det\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow$ el rango de A es 3 independientemente del valor de a.

$$\det\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & 0 & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 0 & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\det\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot\det\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 1+a^2 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} = 2\cdot\det\begin{vmatrix} 3+a & 1+a^2 \\ 5 & 3a-1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(a^2-4a-4) = (-4)\cdot(a -$$

Si $a = 2 \rightarrow \det(\overline{A}) = 0$
Si $a \neq 2 \rightarrow \det(\overline{A}) \neq 0$
Entonces aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius se tiene que:

Si $a = 2 \rightarrow ran(A) = ran(\overline{A}) = 3 = n^{o}\ incognitas \rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Si $a \neq 2 \rightarrow ran(A) \neq ran(\overline{A}) \rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE

Por tanto la respuesta correcta es la c)

PROPUESTAS DE TRABAJO

1.- Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x + ay + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -x + 4y + az = 3 \end{array}\right\}$

a) ¿Existe algun valor del parámetro a que haga el sistema incompatible?

b) Para $a = 1$ ¿el sistema tiene solución única? En caso afirmativo calcularla.

2.- Razona si el sistema es incompatible para algun valor de k

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + 3z = 1 \\ 3x + 7y - 5z = k \end{array}\right\}$$

EXERCICI PROPOSAT 1

$$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -x + 4y + az = 3 \end{array}\right\}$$

Analitzen els rangs: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix}$ i de $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & a & 3 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & a \end{pmatrix} = -3a - 2a^2 - 1$ → Si resolguem $-3a - 2a^2 - 1 = 0$

Solution is : $\{a = -1\}, \left\{a = -\frac{1}{2}\right\}$

CAS 1: Suposem $a \neq -1$ i $a \neq \frac{-1}{2}$
Com que rang(A) = 3 =rang($\overline{A}$)= nº incògnites → S. COMPATIBLE DETERMINAT

CAS 2: Suposem $a = -1$ → $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -x + 4y - z = 3 \end{array}\right\}$

rang(A) = 2 perque tenim el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$

Analitzem el rang de la matriu ampliada amb aquest valor i per això calculem un dels menors d'ordre tres:

$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$ → rang($\overline{A}$)=3

Com que rang(A) = 2 $\neq$ 3 = rang($\overline{A}$) → SISTEMA INCOMPATIBLE

CAS 3: Suposem $a = \frac{-1}{2}$ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -x + 4y - \frac{1}{2}z = 3 \end{array}\right\}$

rang(A) = 2 perque tenim el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \neq 0$

Analitzem el rang de la matriu ampliada amb aquest valor i per això calculem els menors d'ordre tres:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Com que rang(A) = 2 = rang($\overline{A}$) < nº incògnites $\rightarrow$ S. COMPATIBLE INDETERMINAT