GEOMETRIA II

PREGUNTA 1

Ens donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \Re$ i $s \equiv \begin{cases} 6x \quad - z + 8 = 0 \\ 2x - y \quad + 5 = 0 \end{cases}$

Ens donen el pla $\pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$, sent m un paràmetre real.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La posició relativa de les rectes r i s i el punt (o punts) comuns a r i s
b) El valor del paràmetre m perquè la recta s siga paral.lela al pla π
c) L'equació del plànol que conté la recta s i el punt de coordenades $A = (1, 2, 4)$

Escriurem la recta s en forma paramètrica per tindre informació clara de la direcció (recorda que també la pots calcular amb el producte vectorial dels dos vectors normals dels plans de les equacions implícites) i d'un punt.

Resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 6x \quad - z + 8 = 0 \\ 2x - y \quad + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x = -8 + z \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-8}{6} + \frac{z}{6} \\ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{3} + \frac{z}{6} \\ \end{cases}$$

Sustituint en la segona:

$$\begin{cases} x = \frac{-4}{3} + \frac{z}{6} \\ 2 \cdot \left(\frac{-4}{3} + \frac{z}{6} \right) - y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \\ y = 2 \cdot \left(\frac{-4}{3} + \frac{z}{6} \right) + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \\ y = \frac{7}{3} + \frac{z}{3} \end{cases}$$

Tenim aleshores: $s \equiv \begin{cases} x = \frac{-4}{3} + \frac{1}{6}\mu \\ y = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\mu \\ z = \mu \end{cases}$, $\mu \in \Re$

Disposem de la següent informació:

r≡ $\begin{cases} R = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{d_r} = (-2, 1, -1) \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} S = (\frac{-4}{3}, \frac{7}{3}, 0) \\ \overrightarrow{d_s} = (1, 2, 6) \end{cases}$ proporcional per facilitar els coeficients

Clarament les dues direccions no són proporcionals, aleshores les rectes es tallen o es creuen.

Per decidir quina de les dues és la posició de les rectes, analitzem el determinant format per $\overrightarrow{d_r}$, $\overrightarrow{d_s}$ i $\overrightarrow{RS}$

$$\overrightarrow{RS} = (\frac{-4}{3}, \frac{7}{3}, 0) - (1,2,3) = (\ -\frac{7}{3} \quad \frac{1}{3} \quad -3 \ )$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{les rectes es tallen.}$$

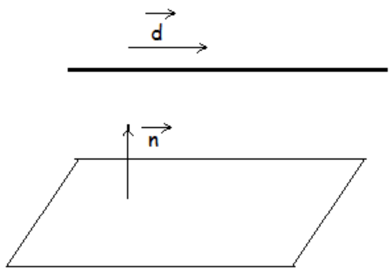
Per a calcular el punt de tall, resoldrem el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1-2\lambda = \frac{-4}{3} + \frac{1}{6}\mu \\ 2+\lambda = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\mu \\ 3-\lambda = \mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 1-2\lambda = \frac{-4}{3} + \frac{1}{6}(3-\lambda) \\ 2+\lambda = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}(3-\lambda) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda = 1 \\ \\ \mu = 2 \end{array}\right\}$$

Substituint aquests valors en la recta r o en la s tenim elpunt d'intersecció d'ambdues: En r més senzill:

$$En \ \ r \equiv \left\{\begin{array}{c} x = 1-2\cdot 1 \\ y = 2+1 \\ z = 3-1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

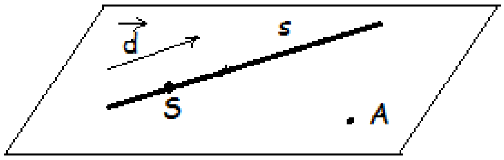
b) Tenim la següent situació:



Els vectors $\vec{n}$ i $\overrightarrow{d_s}$ són perpendiculars i per tant el seu producte escalar és zero.

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{d_s} = (1,2,6) \\ \vec{n} = (2,0,m) \end{array}\right\} \rightarrow \qquad \overrightarrow{d_s}\cdot\vec{n} = (1,2,6)(2,0,m) = 2+6m = 0 \rightarrow \ m = \frac{-1}{3}$$

c)



Calculem el vector $\overrightarrow{SA} = (1,2,4) - (\frac{-4}{3}, \frac{7}{3}, 0) = (\ \frac{7}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 4\ )$

Tenim ja dos direccions (no proporcionals) i diversos punts per poder construir el pla:

$(x,y,z) = (1,2,4) + \lambda(1,2,6) + \mu(\ \frac{7}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 4\ )$

o també: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & \frac{7}{3} \\ y-2 & 2 & -\frac{1}{3} \\ z-4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 10x + 10y - 5z - 10 = 0 \rightarrow 2x + 2y - z - 2 = 0$

PREGUNTA 2

Ens donen els punts P=(0,0,0) , Q=(1,0,1) , R=(2,1,0) i S=(0,2,3)
Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R, i el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S
b) La distància del vèrtex S al plànol que conté el triangle PQR
c) La distància del punt T al plànol que conté el triangle PQR, sent T el punt mitjà del segment d'extrems P i S.

a) Fem: $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1)$

$\overrightarrow{PR} = (2,1,0) - (0,0,0) = (2,1,0)$

$\overrightarrow{PQ}\ x\ \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,2,1) \rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\ x\ \ \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{6}$

Área del triangle = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\ x\ \ \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ **u**^{2}

Per a clacular el volum del tetraedre fem $\overrightarrow{PS} = (0,2,3) - (0,0,0) = (0,2,3)$

Calculem el producte mixt: $[\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$

Volum tetraedre = $\frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}] \right| = \frac{7}{6}$ $\mathbf{u}^3$

b) Planol que conté a P Q i R ens interessa tindre'l en la forma general o implícita:

$\overrightarrow{PQ} = (1,0,1)$ $\overrightarrow{PR} = (2,1,0)$ i com punt agafem P=(0, 0, 0)

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y - x + z = 0 \rightarrow \pi \equiv -x + 2y + z = 0$ i el punt S = (0, 2, 3)

d(S, π) $= \dfrac{|0 + 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

c) Calculem el punt T :

T $= (\frac{0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+3}{2}) = (0, 1, \frac{3}{2})$

d(T, π) $= \dfrac{\left|0 + 2 \cdot 1 + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{7}{2\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{12}$

PREGUNTA 3

En l'espai ens donen els planols $\pi_1,\ \pi_2$ i π_3 d'equacions:
$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 3 = 0$
$\pi_2 \equiv x - y + z - 2 = 0$
$\pi_3 \equiv 3x - y - az - b = 0$

sent a i b paràmetres reals, i la recta r intersecció dels planols π_1 i π_2
Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Un punt, el vector director i les equacions continues de la recta r
b) L'equació del pla que conté la recta r i passa pel punt A=(2,1,3)
c) Els valors de a i b perquè el plànol π_3 continga la recta r

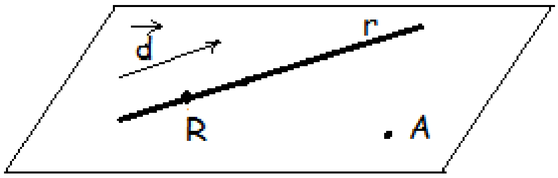
a) Per a trobar les equacions paramètriques de la recta r resoldrem el sistema:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 - z \\ x - y = 2 - z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \quad\quad \lambda \end{array}\right\}, \lambda \in \Re$$

Tenim aleshores la informació demanada per a r:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} R = (1, -1, 0) \\ \vec{d_r} = (0, 1, 1) \end{array}\right.$$

b)



Calculem el vector $\overrightarrow{RA} = (2,1,3) - (1,-1,0) = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ )$

Tenim ja dos direccions (no proporcionals) i diversos punts per poder construir el pla:

$$(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(0,1,1) + \mu(\ 1\ \ 2\ \ 3\ )$$

o també: $\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z-3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = x + y - z = 0 \to \pi \equiv x + y - z = 0$

c) Si π_3 conté la recta r aleshores $\vec{n}$ i $\vec{d_r}$ són perpendiculars i per tant el seu producte escalar és zero.

$$\pi_3 \equiv 3x - y - az - b = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{d_r} = (0,1,1) \\ \vec{n} = (3,-1,-a) \end{array}\right\} \to \quad \vec{d_r} \bullet \vec{n} = (0,1,1)(3,-1,-a) = -1 - a = 0 \to a = -1$$

També π_3 conté el punt $R = (1,-1,0)$ de la recta r , aleshores haurà de verificar l'equació:

$$\pi_3 \equiv 3x - y + z - b = 0 \to 3 \bullet 1 - (-1) - 0 - b = 0 \to b = 4$$

Ens queda pertant: $\pi_3 \equiv 3x - y - z - 4 = 0$