EXAMEN CONTINUITAT-DERIVADES I

Exercici 1

Donada la funció f definida por $f(x) = \sin x$, pea a qualsevol valor real x, es demana obtindre raonadamente, escrivint tots els pasos del raonament utilitzat:

a) Equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscisa $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}$.

b) Equació de la recta normal a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscisa $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$. Recorda que la recta normal a una corba en un punto P és la recta que passa per eixe punt P i és perpendicular a la recta tangent a la corba en el punto P.

c) Angle format per les rectes determinades en a) i b).

a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangent a la corba serà: $s : y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

La pendent de la recta normal a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscisa $x = \frac{\pi}{3}$ és

$m' = \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -2$.

Aleshores la recta normal serà: $s : y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) L'angle format per les rectes $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ i $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ serà el menor dels àngles determinats pels seus vectors directors.

Sabent que les pendents de les rectes són $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $m' = \frac{-1}{m} = -2$, aleshores:

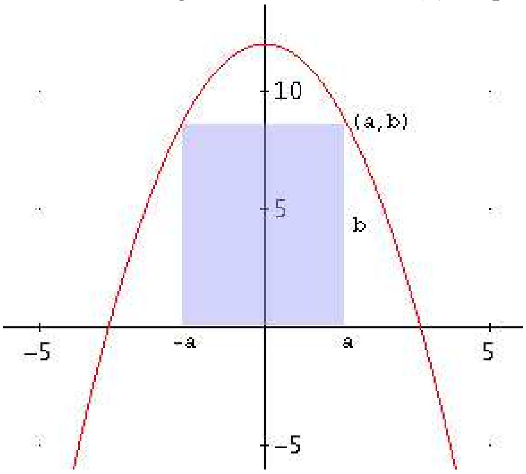
$\vec{u}_r = \left(2, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{u}_s = (1, -2)$

Tenim: $\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|} = \frac{\left|\left(2, \sqrt{3}\right) \cdot (1, -2)\right|}{\sqrt{4+3}\sqrt{1+4}} = \frac{\left|2 - 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{35}} \approx 0{,}247 \Rightarrow \left(\widehat{r,s}\right) = \arccos(0{,}247) = 75^\circ 41' 59''$

Exercici 2

Halla les dimensions del cartell d'àrea màxima amb forma de rectangle que té dos vértex subjectes a una estructura rígida parabòlica d'equació $y = 12 - x^2$, i els altres dos vértex estan situats sobre l'eix OX .

Hem d'optimitzar l'àrea del rectangle.
Dibuixarem la gràfica de la funció f(x) i representem un rectangle de dimensió 2a · b.



El rectangle tindrà com àrea A = 2ab.

$b = 12 - a^2$ (perquè es troba sobre la parábola) $\rightarrow$

$A = 2a(12 - a^2) = 24a - 2a^3$

L'expressió a maximitzar és:

$A = -2a^3 + 24a$

$A' = -6a^2 + 24 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = +2, b = 8$, perquè la solució negativa no té sentit.
Per a comprovar que es tracta d'un màxim podem en aquest cas fer ús de la segona derivada de A:

$A'' = -12a \rightarrow A''(2) = -24 < 0$, i per tant és un màxim.

El rectangle té dimensions 2a· b = 4·8, és a dir 4 unitats de base per 8 d'altura.

Exercici 3

Siga f la funció definida per $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtindre raonadament:

a) Domini i les assímptotes de la funció $f(x)$.

b) Intérvals de creiximent i decreiximent de la funció $f(x)$.

c) És aplicable el Teorema de Bolzano a la funció

$f(x)=(x^2 + 3x + 5) / (x^3 - 2x - 7)$?

Justifica la resposta. Es pot assegurar que la funció talla l'eix d'abscisses en algun punt o, al contrari, no el talla en cap punt?

a) Si $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, el domini l'obtindrem en igualar a zero el denominador…

$x^2-3x+2=0 \rightarrow x_1=2, x_2=1$

El domini seran tots els reals menys *x = 2* i *x = 1*.

- Assímptotes verticals: *x = 2, x = 1*.
- Assímptotes horitzontals: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3x+2}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3x+2}=0$.

  Tenim una assímptota horitzontal en *y = 0*

- Assímptotes obliques: No en té, ja que hem trobat una horitzontal.

b) Busquem els màxims i els mínims relatius:

$$f'(x)=\frac{x^2-3x+2-(2x-3)x}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=\frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=0 \rightarrow -x^2+2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Estudiem el creiximent i el decreiximent de la funció tenint en compte els dos extrems relatius i els punts on ha fallat el domini:

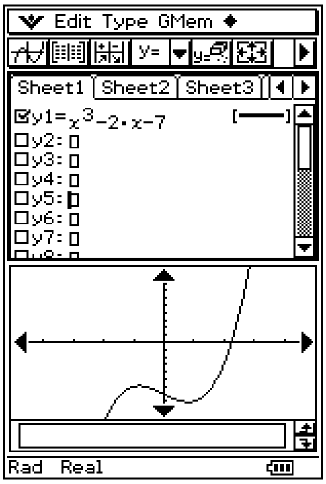
x		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘		↘

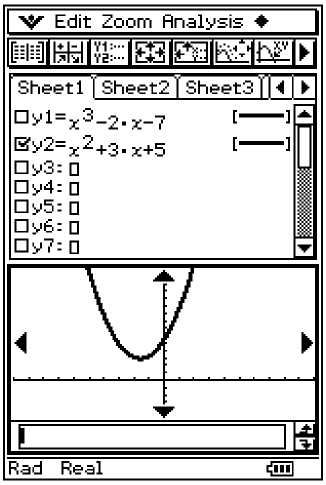
Per tant $x=-\sqrt{2}$ és un mínim i $x=\sqrt{2}$ un màxim.

c) Considerem la funció: $f(x)=(x^2 + 3x + 5) / (x^3 - 2x - 7)$

La funció és una fracció algebraica, aleshores cal analitzar el seu domini i per tant estudiar quan $x^3 - 2x - 7 = 0$. Però si ho intentem resoldre fent ús de Ruffini no trobem cap arrel racional.

Però si analitzem $g(x) = x^3 - 2x - 7$ polinòmica, $g(2)<0$ i $g(3)>0$ i aleshores pel Teorema de Bolzano sabem que existeix un punt $x=c$ en l'intérval $(2, 3)$ on $g(c) = 0$.





Per tant ja sabem que hi ha almenys un punt que ens anul.la el denominador, un punt de l'intérval $(2, 3)$ on la nostra funció $f(x)$ no serà continua.

Si analitzem el numerador, aquest és sempre positiu com s'observa a la gràfica.

Aleshores el quocient $f(x)$ verifica:

Si $x<c \rightarrow f(x)<0$
Si $x>c \rightarrow f(x)>0$

Però $f(x)$ no és continua en $x=c$ i per tant no podem aplicar el Teorema de Bolzano a la funció $f(x)$.
I no podem concloure res més.

Us deixe que representeu vosaltres gràficament la funció $f(x)$ per veure què passa.