

## PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ 1

a) Calcula el punt de la corba  $y = \frac{1}{1+x^2}$ , en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim.

b) Feu un dibuix on apareguin la corba, el punt i la recta tangent.

a) El pendent de la recta serà  $y' = m = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Si volem que el pendent  $m$  siga màxim, tenim un problema d'optimització:

$$m' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow -2(1+x^2) + 8x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Comprovem si en aquests punts tenim màxims o mínims:

$$m' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow m'' = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow m''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \text{ aleshores serà un mínim i } m''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \text{ serà un màxim.}$$

Aleshores, per a  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  el pendent de la corba  $y = \frac{1}{1+x^2}$  serà màxim.

La recta tangent tindrà la forma  $g(x) = mx + n$  i ha de passar pel punt

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Per la qual cosa } m = y'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{16}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + n = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-3}{8} + n = \frac{3}{4} \Rightarrow n = \frac{9}{8}$$

$$\text{L'equació de la recta tangent serà } g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$$

Podem dibuixar la funció  $f(x)$ , sabent que és simètrica respecte l'eix Y, que té una assíptota horitzontal que coincideix amb l'eix X i que el màxim és el punt (0, 1). Podem calcular varios punts per completar la gràfica de la funció.

La recta tangent al punt  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$  i la funció  $f(x)$  són així:

