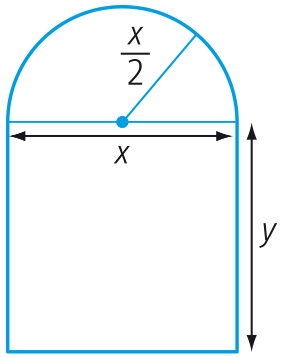
EXERCICIS D'OPTIMITZACIÓ 2

La portalada d'una catedral estÀ formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que descansa sobre dos columnes, tal com il.lustra la figura adjunta, on x és el diàmetro de la circumfèrencia, es a dir, la distància entre columnes, i y és l'altura de cada columna.



a) Comprova que la funció $f(x,y)=\frac{\pi x^2}{8}+xy$ determina l'àrea d'esta portalada.

b) Si el perímetre de la portalada és de 20 m, determina les mesures x i y de la portalada que maximitzen l'àrea.

a) $A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{semicircunferencia}} = f(x,y) = xy + \dfrac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \dfrac{\pi x^2}{8}$.

b) Ell perímetre és $P = x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 20$.

Si aïllem y, queda:

$$P = x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 20 \Rightarrow 2y = 20 - \pi\frac{x}{2} - x \Rightarrow y = \frac{20 - \pi\frac{x}{2} - x}{2} \Rightarrow y = 10 - x\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = 10 - \frac{(\pi+2)x}{4}$$

Si reduïm la funció de l'àrea a una sola variable tenim:

$$f(x) = x\left(10 - \frac{(\pi+2)x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{(\pi+2)x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{80x}{8} - \frac{2(\pi+2)x^2}{8} + \frac{\pi x^2}{8} =$$
$$= \frac{80x - 2(\pi+2)x^2 + \pi x^2}{8} = \frac{80x - x^2(\pi+4)}{8}$$

Derivem per a buscar el màxim de la funció:

$$f'(x) = \frac{80 - 2x(\pi+4)}{8} = 10 - \frac{x}{4}(\pi+4) = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{\pi+4} \text{ m}$$

Comprovem que es tracta d'un màxim:

$$f''(x) = \frac{-(\pi+4)}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{40}{\pi+4}\right) < 0 \Rightarrow \text{Máximo}.$$

Ara calculem y:

$$y = 10 - \frac{(\pi+2)x}{4} = 10 - \frac{(\pi+2)\frac{40}{\pi+4}}{4} = \frac{40 - \frac{40(\pi+2)}{\pi+4}}{4} = \frac{40(\pi+4) - 40(\pi+2)}{4(\pi+4)} =$$

$$= \frac{80}{4(\pi+4)} = \frac{20}{\pi+4} \text{ m}$$

Per tant, les mesures demanades són $x = \frac{40}{\pi+4}$ m i $y = \frac{20}{\pi+4}$ m .