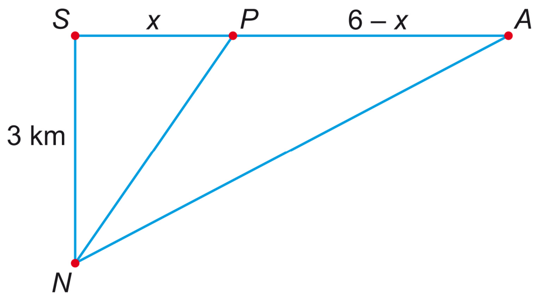
PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ 3

Un nadador està en el mar en un punt *N*, situad a 3 km d'una platja recta, i just davant d'un punt *S*, situat en la mateixa vora del mar; i vol anar cap a un punt *A*, situat també en la vora i a 6 km del punt *S*, de manera que el triángle *NSA* és rectangle en el vértex *S*. El nadador nada a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constante de 5 km/h.

a) Si *P* és un punte entre el punt *S* i el punt *A* que està a una distància *x* de *S*, demostra que el temps, en hores, que necessita el nadador per a nadar des del punt *N* fins el punt *P* i caminar des del punt *P* fins el punt *A* ve donat per l'expressió $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.

b) Calcula el valor de *x* que determina el mínim temps necessari per anar des del punt *N* fins el punt *A*, passant per *P*. Quant és el valor d'este temps mínim?



a) Observem que la distància entre *N* i *P* és $\sqrt{3^2+x^2}=\sqrt{x^2+9}$, per la qual cosa el nadador ha de nadar durant $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ hores i caminar durant $\dfrac{6-x}{5}$ hores; aleshores $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.

b) Volem minimitzar la funció $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$ quan $x\in[0,\,6]$.

Derivant i igualant a zero tenim:

$$t'(x)=\frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}$$

$$t'(x)=0\Rightarrow\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{5}\Rightarrow 3\sqrt{x^2+9}=5x\Rightarrow 9\left(x^2+9\right)=25x^2\Rightarrow 16x^2-81=0\Rightarrow x^2=\frac{81}{16}\Rightarrow x=\pm\frac{9}{4}$$

L'únic valor que anul.la la derivada en l'interval $[0,\,6]$ és $x=\dfrac{9}{4}$. Calculant el valor de la funció en aquest punt i en els extrems de l'interval obtenim:

$$t(0)=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}\qquad t\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2\qquad t(6)=\frac{\sqrt{45}}{3}=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$$

Per tant, el mínim s'alcança quan $x=\dfrac{9}{4}=2{,}25\text{ km}$, és a dir, el temps mínim necessari per anar des de *N* fins *A*, passant per *P*, és de 2 hores.