CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1.- **Estudia la continuidad y derivabilidad de**:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ x^2 + \dfrac{x}{2} + 1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es contínua y derivable, en principio, en $\Re - \{0\}$
Vamos a estudiar qué ocurre en x=0

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = [\text{l'Hôpital}] = \lim_{x\to 0+} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right) = 1$$

Puesto que los dos límites laterales coinciden con $f(0) = 1$ se tiene que la función también es contínua en x = 0.

Analizamos ahora la derivabilidad en x = 0

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = [\text{l'Hôpital}] = \lim_{h\to 0+} \frac{e^h - 1}{2h} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2 + \frac{h}{2} + 1 - 1}{h} = \frac{1}{2}$$

Así pues se tiene que la función es derivable también en x = 0 y además $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{si } x > 0 \\ 2x + \dfrac{1}{2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2.- **Estudia el número de soluciones de la ecuación**: $(x^2+2)\cdot e^x = x\cdot e^x + 3$

Consideramos la función $f(x) = (x^2+2)\cdot e^x - x\cdot e^x - 3 = (x^2 - x + 2)\cdot e^x - 3$ que es contínua y derivable en $\Re$.

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = 2e - 3 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos decir que existe una raíz en el intervalo $(0,1)$

Estudiaremos la derivada: $f'(x) = (x^2 + x + 1)\cdot e^x > 0$ en todo $\Re$ y por tanto la función es estrictamente creciente (inyectiva).

Así pues existe una única raíz de la ecuación y además ésta se encuentra en el intervalo [0,1].

3.- **Estudia el número de soluciones de** $\ln(x+3) - \frac{1}{8}x^2 = 0$

Para ello consideramos la función; $f(x) = \ln(x+3) - \frac{1}{8}x^2$. Esta función es contínua y derivable en el intervalo $]-3,+\infty[$ (recuerda $x+3 > 0 \rightarrow x > -3$ donde está definido el logaritmo neperiano)

Veamos qué ocurre con la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4}x = \frac{-x^2 - 3x + 4}{4(x+3)} = \frac{(x+4)(1-x)}{4(x+3)}$$

La derivada se anula para $x = -4$ y $x = 1$

Tenemos por tanto que la derivada no se anula en dos subintervalos:

primero desde $]-3,1[$ y después desde $]1,+\infty[$ (- 4 queda fuera del dominio)

En $]-3,1[$ se tiene que $f'(x) > 0$ luego la función es estrictamente creciente (inyectiva)
$f(-2) = \frac{-1}{2} < 0$
$f(0) = \ln 3 > 0$ por tanto aplicando el teorema de Bolzano existe una raíz en este subintervalo que además será única (por la inyectividad)

En $]1,+\infty[$ se tiene que $f'(x) < 0$ luego la función es estrictamente decreciente (inyectiva)
$f(2) = \ln 5 - \frac{1}{2} > 0$
$f(4) = \ln 7 - 2 < 0$ por tanto aplicando el teorema de Bolzano existe una raíz en este subintervalo que además será única (por la inyectividad)
La ecuación dada tiene por tanto dos soluciones.