FUNCIONS CONTÍNUES. DERIVADES.

PREGUNTA 1

a) Donada la funció real $h(x) = \dfrac{8}{1+x^2}$ calcula les derivades primera i segona. Quin valor prenen quan $x = 3$?

b) Considerem la funció $f(x) = \dfrac{4}{x}$ Calcula l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la gràfica de f(x) en el punt d'abscissa $x = 2$.

a) $h'(x) = \dfrac{-8 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-16x}{(1+x^2)^2} \quad \rightarrow \quad h'(3) = \dfrac{-16 \cdot 3}{(1+3^2)^2} = \dfrac{-48}{100} = -\dfrac{12}{25}$

$$h''(x) = \frac{-16(1+x^2)^2 - (-16x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{16(1+x^2)[-(1+x^2)+4x^2]}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{16[-1-x^2+4x^2]}{(1+x^2)^3} = \frac{16[-1+3x^2]}{(1+x^2)^3} \quad \rightarrow \quad h''(3) = \frac{16[-1+3 \cdot 3^2]}{(1+3^2)^3} = \frac{52}{125}$$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-4}{x^2}$

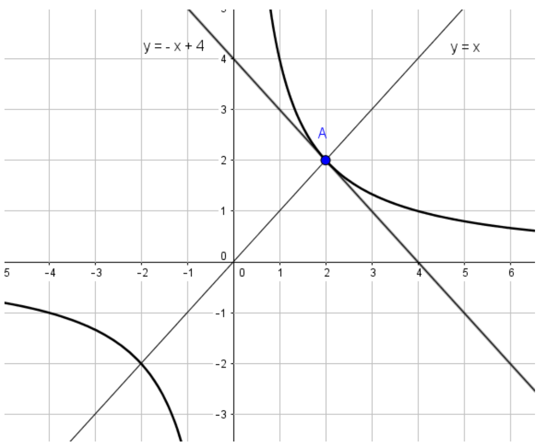
$x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = \dfrac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad f'(2) = \dfrac{-4}{2^2} = -1$

Equació recta tangent a f(x) en x = 2: $y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - 2 = -1(x-2) \quad \rightarrow \quad y = -x + 4$

Equació recta normal a f(x) en x = 2: $y - f(2) = \dfrac{-1}{f'(2)}(x-2)$

$y - 2 = \dfrac{-1}{-1}(x-2) \quad \rightarrow \quad y = x$



PREGUNTA 2

a) Per a quins valors de k és contínua en $\Re$ la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3k^2x - 5k^2, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2kx + 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) És aplicable el Teorema de Bolzano a la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$ en [2, 4] ?. Justifica la resposta. Es pot assegurar que la funció talla l'eix d'abscisses en algun punt o, al contrari, no el talla en cap punt?

a) Solament cal estudiar la contiunitat en x = 2 ja que en la resta de punts la funció és continua (dos trossos polinòmics)

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot k \cdot 2 + 1 = 4 - 4k + 1 = 5 - 4k$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3k^2x - 5k^2) = k^2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k$$

Els límits laterals han de coincidir: $k^2 = 5 - 4k \ \rightarrow \ k^2 + 4k - 5 = 0 \ \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{cases}$

Aleshores la funció és contínua en $\Re$ per a qualsevol d'aquests dos valors.

b) Estudiem el domini de la funció $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0, \rightarrow x = 3$

Aleshores dom$f(x) = \Re - \{3\}$

$f(2) < 0$

$f(4) > 0$

La funció no és contínua en [2, 4]

Aleshores no es verifiquen les hipòtesis del teorema de Bolzano i no podem garantir la existència o no d'un punt de tall amb l'eix X

PREGUNTA 3

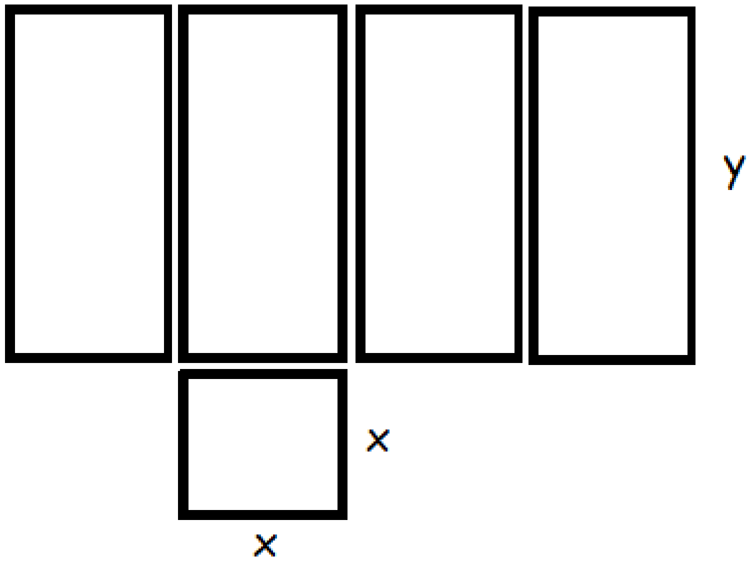
Es vol construir un dipòsit de $1500\ m^3$ de capacitat, amb forma de caixa oberta per la part superior.

La base és un quadrat i les parets laterals són quatre rectangles iguals perpendiculars a la base.

El preu del m^2 de la base és de 15 € i el preu de cada m^2 de paret lateral és de 5 €.

Obteniu raonadament, escrivit tots els passos del raonament utilitzat:

a) El cost total del dipòsit en funció de la longitud x d'un costat de la base.
b) Les longituds del costat de la base i de l'altura del dipòsit perquè aquest cost total siga mínim.
c) El valor del mínim cost total del dipòsit.



Cost$(x,y) = 15x^2 + 5 \cdot 4xy = 15x^2 + 20xy$

Com que el volum és de $1500\ m^3 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot y = 1500 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1500}{x^2}$

$C(x) = 15x^2 + 20x\frac{1500}{x^2} = 15x^2 + \frac{30000}{x} = \frac{15x^3 + 30000}{x}$ amb $x > 0$ pel context del problema

$C'(x) = \frac{30x^3 - 30000}{x^2} \quad \rightarrow C'(x) = 0 \quad \rightarrow 30x^3 - 30000 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 10$

	$0 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
$f'(x)$	< 0	0	> 0
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Aleshores tenim un mínim en $x = 10 \quad \rightarrow y = \frac{1500}{10^2} = 15$

Les dimensions del dipòsit de cost mínim són 10 m costat de la base i 15 m d'altura

Eixe cost mínim és $C(10) = \frac{15 \cdot 10^3 + 30000}{10} = 4500$ €

EXERCICI 4
Donada la funció polinòmica $f(x) = 4 - x^2$ es demana:

a) Gràfica de f(x)
b) El punt P d'aquesta corba on la tangent és perpendicular a la recta d'equació $x + y = 0$
c) Les rectes que passen per $(-2, 1)$ i són tangents a la corba $y = 4 - x^2$ obtenint els punts de tangència.

a) Ja sabem que es tracta d'una paràbola.

b)

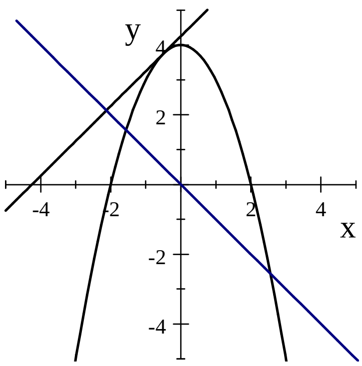
$x + y = 0 \rightarrow y = -x$ Les perpendiculars a aquesta recta són de la forma $y = x + b$

(Recorda que si $y = mx + n \rightarrow y = \frac{-1}{m}x + n'$ és perpendicular.)

Busquem per tant una recta tangent a f(x) en un punt on el pendent d'aquesta siga 1
$f(x) = 4 - x^2 \quad \rightarrow f(x)' = -2x$
$-2x = 1 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$
$f(\frac{-1}{2}) = 4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$

El punt buscat és $(x,y) = (\frac{-1}{2}, \frac{15}{4})$

Calculem la recta tangent en aquest punt: $\frac{15}{4} = \frac{-1}{2} + b \rightarrow b = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{4}$
$y = x + \frac{17}{4}$ és la recta buscada



$f(x) = 4 - x^2$
$y = x + \frac{17}{4}$
$y = -x$

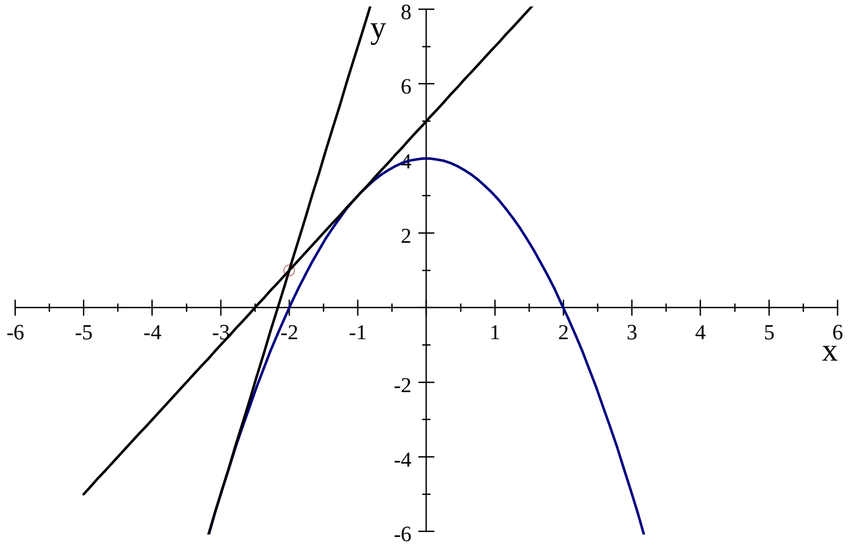
c) Rectes que passen per (-2,1) i són tangents a $f(x) = 4 - x^2$

$y = mx + n$
Ha de ser tangent a $f(x)$ per tant $f(x)' = -2x \rightarrow m = -2x$
Punt de tangència $(x, f(x)) = (x, 4 - x^2)$

Recta que passa per $(-2,1)$ i $(x_1, 4 - x_1^2) \rightarrow y - 1 = \dfrac{4 - x_1^2 - 1}{x_1 + 2}(x + 2)$
Ha de verificar-se que $\dfrac{4 - x_1^2 - 1}{x_1 + 2} = -2x_1 \rightarrow 3 - x_1^2 = -2x_1^2 - 4x_1 \rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 3 = 0 \rightarrow$
Solucions: $x_1 = -3,\ x_1 = -1$

1r punt de tangència $(-3,-5)$ →Recta: $y - 1 = 6(x + 2) \rightarrow y = 6x + 13$

2n punt de tangència $(-1,3)$ →Recta: $y - 1 = 2(x + 2) \rightarrow y = 2x + 5$



$f(x) = 4 - x^2$
$y = 6x + 13$
$y = 2x + 5$