

2n BATXILLERAT EXAMEN INTEGRALS

Amb el símbol $\ln x$ es representa el logaritme d'un nombre positiu x quan la base del logaritme és el número e . Siga f la funció que per a un nombre positiu x està definida per $f(x) = 4x \ln x$

Obtindre raonadament:

- El valor de x on la funció f alcança el mínim relatiu.
- L'equació de la recta tangent a la corba $y = 4x \ln x$ en el punt $(1, 0)$.
- L'àrea limitada entre les rectes $y = 0$, $x = e$ i $x = e^2$ i la corba $y = 4x \ln x$.

a) Per a calcular els punts crítics deriva la funció i iguala a zero:

$$f'(x) = 4 \ln x + \frac{4x}{x} = 4 \ln x + 4 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Cal comprovar si aquest valor és un mínim:

$$f''(x) = \frac{4}{x} \rightarrow f''(e^{-1}) = \frac{4}{e^{-1}} = 4e > 0. \text{ Aleshores es tracta d'un mínim.}$$

b) La recta tangent a la corba $f(x) = 4x \ln x$ en $(1, 0)$ tindrà com pendent la derivada de $f(x)$ en aquest punt.

$$\text{Per tant } m = f'(1) = 4 \ln 1 + 4 = 4.$$

La recta serà $y = 4x + n$. L'ordenada en l'origen la podem calcular substituint el punt de tangència en l'equació de la recta: $0 = 4 + n$, per tant $n = -4$

Així, la recta tangent a $f(x)$ en $(1, 0)$ serà $y = 4x - 4$

c) La funció $f(x) = 4x \ln x$ sols talla l'eix X en $x = 0$ i $x = 1$.

En l'interval comprès entre $x = e$ i $x = e^2$ la funció és sempre positiva.

Així doncs l'àrea limitada entre les rectes i la corba serà: $A = \int_e^{e^2} 4x \ln x dx$

Utilitzem el mètode d'integració per parts:

$$\begin{cases} \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ 4x = dv \rightarrow 2x^2 = v \end{cases}$$

Substituïm en la integral:

$$\int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - \int \frac{2x^2}{x} dx = 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2$$

Aleshores es té:

$$A = \int_e^{e^2} 4x \ln x dx = \left[2x^2 \ln x - x^2 \right]_e^{e^2} = 2e^4 \ln e^2 - e^4 - (2e^2 \ln e - e^2) = 4e^4 - e^4 - 2e^2 + e^2 = 3e^4 - e^2 ; 156,4 u^2$$

Siga f la funció definida per $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtindre raonadament:

a) El domini i les assíptotes de la funció $f(x)$.

b) Els intervals de creiximent i decreiximent de la funció $f(x)$.

c) La integral $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$.

a) Si $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$, el domini s'obté en igualar a zero el denominador...

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$$

Per tant el domini seran tots els nombres reals menys $x = 2, x = 1$.

- Assíptotes verticals: $x = 2, x = 1$.
- Assíptotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

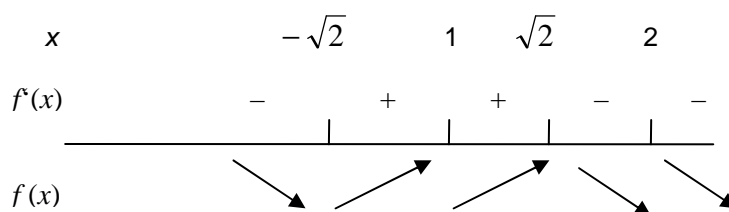
Té una assíptota horitzontal en $y = 0$

- Assíptotes oblíques: No en té ja que hem trobat una d'horitzontal.

b) Calculem els màxims i els mínims relatius:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - (2x - 3)x}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Estudiem el creiximent i el decreiximent de la funció tenint en compte els punts on falla el domini:



Per tant $x = -\sqrt{2}$ és un mínim i $x = \sqrt{2}$ un màxim.

$$c) \int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Per fraccions simples:

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \rightarrow$$

$$x = A(x-2) + B(x-1) \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 2=B \\ x=1 \rightarrow -1=A \end{cases}$$

$$\text{Així } \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$$

La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

Calcula el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k .

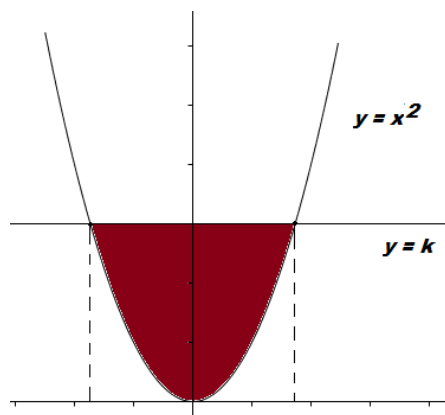
Troba el valor de k per a que l'àrea limitada siga $\sqrt{6} u^2$.

Calculem els punts de tall entre la corba i la recta: $k = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

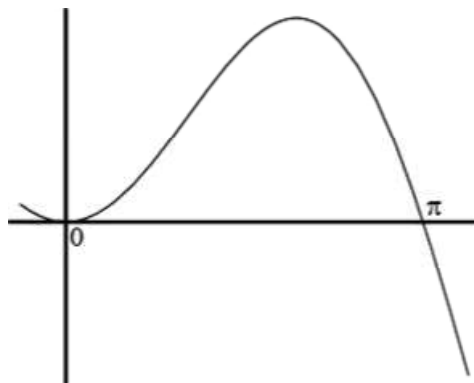
Donem l'àrea en funció del paràmetre.

$$A = 2 \int_0^{\sqrt{k}} (k - x^2) dx = 2 \left[kx - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{k}} = 2 \left(k\sqrt{k} - \frac{\sqrt{k}^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2k\sqrt{k}}{3} = \frac{4}{3} k\sqrt{k} u^2$$

$$\frac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{16k^3}{9} = 6 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{54}{16}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$



Considerem la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$



Trobeu-ne una primitiva i aplica el resultat per calcular l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.

Resoldrem la integral per parts, aplicant $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$, on:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sin x \quad \rightarrow \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\text{La integral queda: } \int x \sin x dx = -x \cos(x) + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

La funció $f(x)=x \cdot \sin x$ és sempre positiva en l'interval $[0, \pi]$ aleshores tidrem que:

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| -x \cos x + \sin x \right|_0^{\pi} = \left| -\pi \cos \pi + \sin \pi - (0 \cos 0 + \sin 0) \right|_0^{\pi} = \pi$$