PAU MATEMATICAS II

1.- Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ Obtener razonadamente escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La matriz inversa de A

b) Las matrices X e Y de orden 2x2 tales que XA=B y AY=B

c) Justificar razonadamente que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$ donde I es la matriz identidad del mismo orden que M entonces se verifica la igualdad $M^3 = M^7$

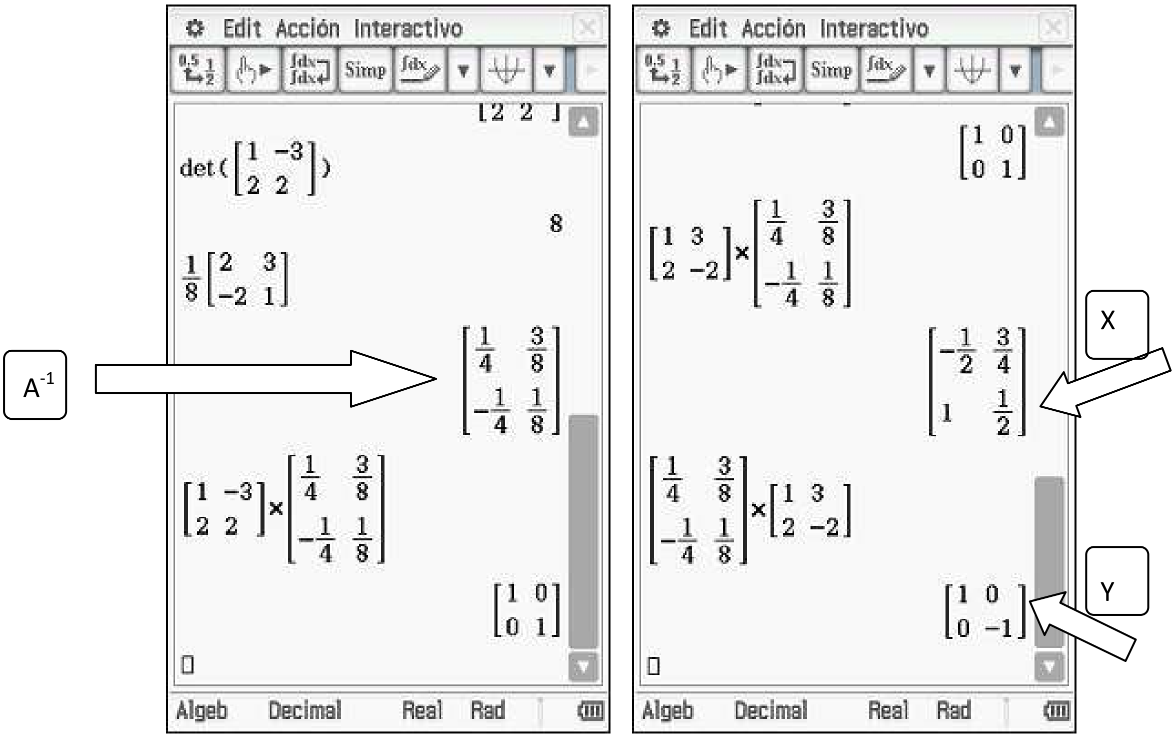
Calculamos det(A). Si éste es distinto de cero tenemos garantizada la existencia de A^{-1}

Después calculamos $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA)^t$

Puesto que existe A^{-1} y la hemos calculado anteriormente, procedemos de la forma siguiente:

XA = B	AY=B
$XA\,A^{-1} = B\,A^{-1}$ → $X\,I = B\,A^{-1}$ → $X = B\,A^{-1}$	$A^{-1}A\,Y = A^{-1}\,B$ → $I\,Y = A^{-1}\,B$ → $Y = A^{-1}\,B$

Fijate que estamos poniendo de manifiesto con esta actividad, la propiedad de no conmutatividad del producto de matrices. En el primer apartado multiplicamos por A^{-1} en ambos lados de la igualdad por la izquierda. En el segundo multiplicamos por A^{-1} en ambos lados de la igualdad por la derecha



2.- Obtener razonadamente escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Ecuación del plano π que pasa por el punto P=(2,0,1) y es perpendicular a la recta $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x+2y=0} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases}$

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r con el plano π

c) La distancia del punto P a la recta r, y justificar razonadamente que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$

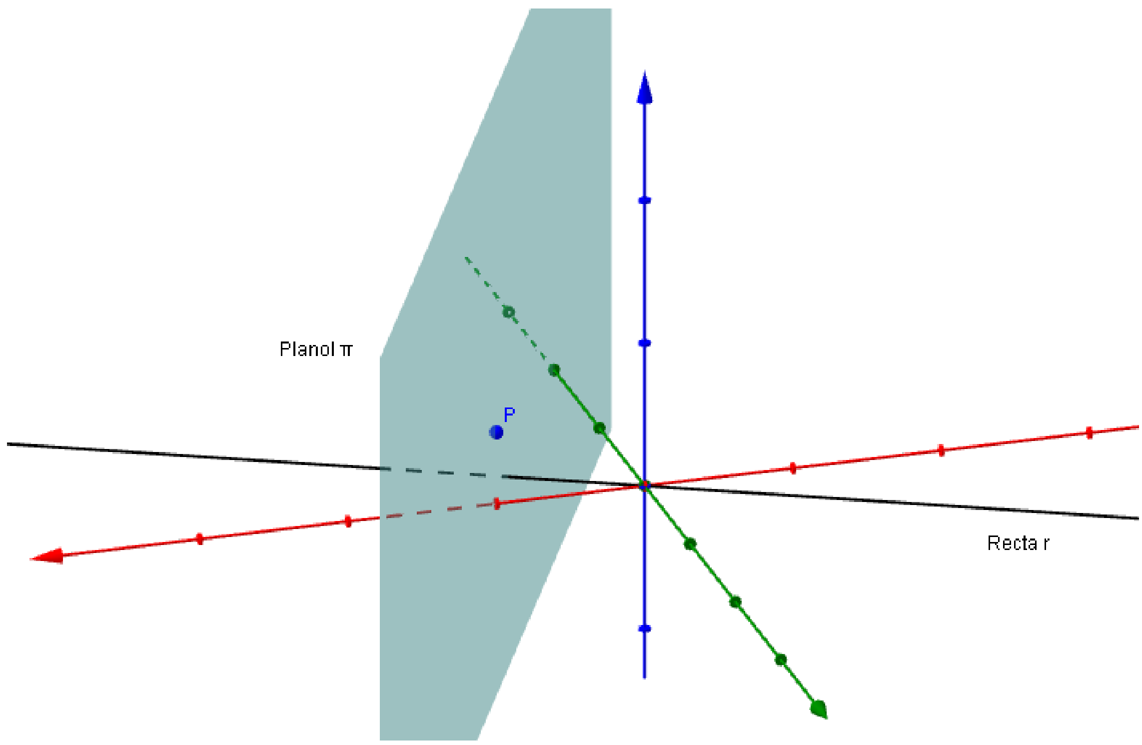
Podemos escribir la ecuación paramétrica de r haciendo y=λ: $\boldsymbol{r}: \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

La dirección de la recta será el vector normal al plano **π** que buscamos: $\overrightarrow{dr} = \vec{n} = (-2,1,0)$

Entonces π: -2x + y + D = 0

Puesto que el punto P=(2,0,1) pertenece al plano debe verificar la ecuación de este y con ello calculamos D

-2 · 2 + 0 + D = 0 → D = 4 → π: -2x + y + 4 = 0



La distancia del punto P a la recta la podemos calcular de la forma siguiente:

Calculamos A el punto de intersección entre el plano y la recta. El módulo del vector $\overrightarrow{AP}$ es la distancia buscada.

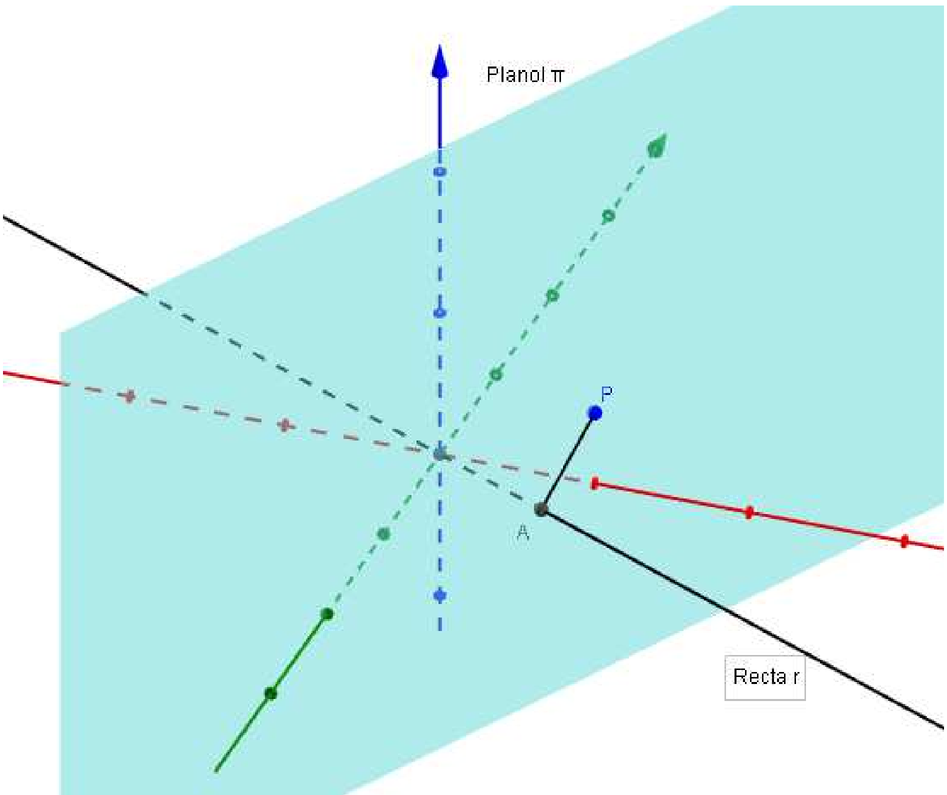
$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ π: -2x + y + 4 = 0

Sustituyendo en π: $-2 \cdot (-2\lambda) + \lambda + 4 = 0 \quad 5\lambda + 4 = 0 \quad \lambda = \frac{-4}{5}$

Por tanto el punto A resulta: $A = \left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$

d(P,r) = $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

El punto A es la proyección ortogonal de P sobre la recta r por lo que la distancia de P a cualquier otro punto de r será siempre mayor que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$



3.- Obtener razonadamente escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función real f definida por

f(x) = (x – 1)(x – 3), siendo x un número real.

b) El área del recinto acotado limitado por las curvas y=(x – 1)(x – 3) e y= - (x – 1)(x – 3)

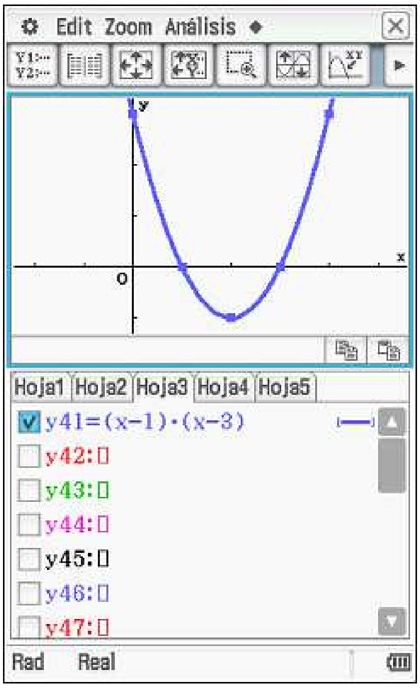
c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva y=a(x – 1)(x – 3) el eje Y y el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) es 4/3.

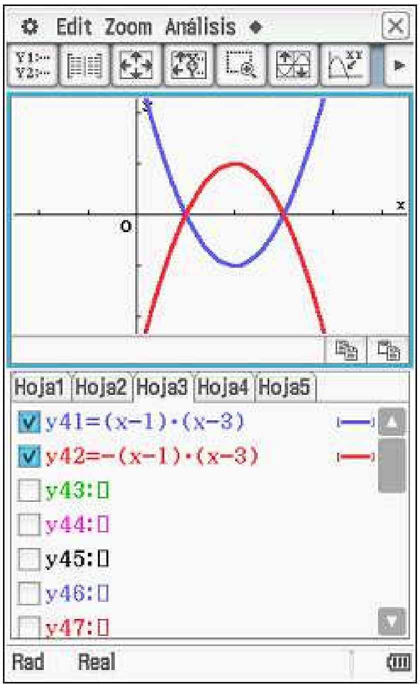
La función f(x) es una parábola convexa (coef. de x^2 =1) Tiene por tanto un mínimo en el vértice x_v=2 V=(2, -1) y por lo tanto a su izquierda la función decreciente y a su derecha creciente. Recuerda que el dominio de una función polinómica es R.

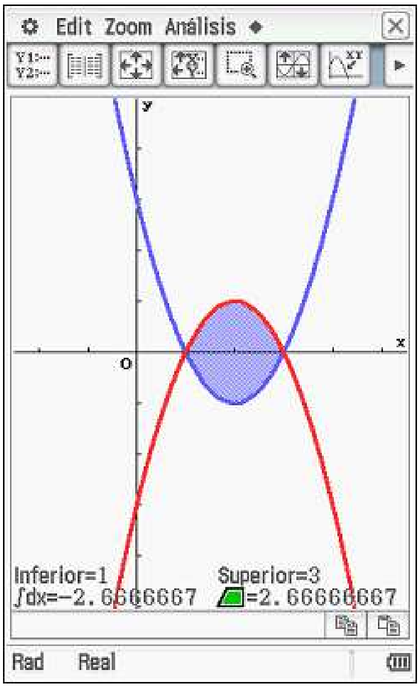
Decreciente $x\epsilon]-\infty,2[$	Creciente $x\epsilon]2,+\infty[$

La gráfica de y = - (x – 1)(x – 3) es la opuesta a la representada anteriormente por lo que tenemos una parábola cóncava (coef. de x^2 = - 1)

El recinto que delimitan las dos funciones es:







Los puntos de intersección entre las dos gráficas son (1, 0) y (3, 0). (Fíjate que podemos calcular el área del recinto que nos piden de diferentes formas ya que es un recinto simétrico respecto al eje X.)

En cualquier caso se tiene:

$$A = \int_1^3 -(x-1)(x-3) - (x-1)(x-3)dx$$
$$= \int_1^3 -(x^2-4x+3) - (x^2-4x+3)dx$$
$$= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6\, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 = \frac{8}{3}\, u^2$$

En el tercer apartado se nos pide que:

$$A = \int_0^1 |a(x-1)(x-3)|dx = \frac{4}{3}$$

Fíjate que al multiplicar por **a** no cambian los puntos de corte de la función con el eje X

$$A = \int_0^1 |a(x-1)(x-3)|dx$$
$$= \int_0^1 |a(x^2-4x+3)|dx$$
$$= |a| \int_0^1 |x^2-4x+3|dx = |a| \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1\right| = |a|\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto $|a| = 1$ y $a = \pm 1$ La función buscada es y = (x - 1)(x - 3) ya que en el enunciado nos piden el valor positivo de a por lo que tomamos $a = 1$