## PAU JUNY 2015 OPCIÓ B

**1.- Ens donen el sistema** $\begin{cases} (1-\alpha)x+(2\alpha+1)y+(2\alpha+2)z=\alpha \\ \alpha x+\alpha y=2\alpha+2 \\ 2x+(\alpha+1)y+(\alpha-1)z=\alpha^2-2\alpha+9 \end{cases}$

**on $\alpha$ és un paràmetre real. Obtindre raonadament escrivint tots els passos utilitzats:**

a) **Totes les solucions del sistema quan $\alpha=1$**
b) **Justificació raonada de si el sitema és compatible o incompatible quan $\alpha=2$**
c) **Valors de $\alpha$ per als quals el sistema és compatible determinat.**

Per a donar resposta als diferents apartats aplicarem el Teorema de Rouché

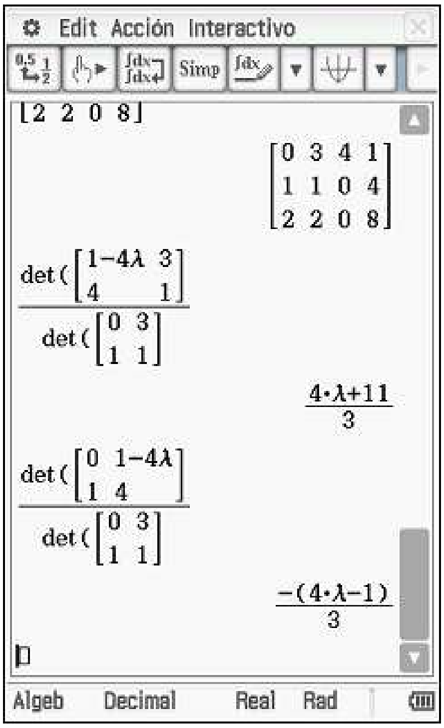
Si $\alpha$=1 tenim la matriu dels coeficients del sistema i la matriu ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A}=\left(\begin{matrix} & 1 \\ A & 4 \\ & 8 \end{matrix}\right)$$

Analitzem els rangs. Clarament es veu que rang(A) = 2 (fila 2 i fila 3 proporcionals) i anàlogament amb l'ampliada.

Així es té: rang(A) = rang($\bar{A}$) = 2 < num incògnites → SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT

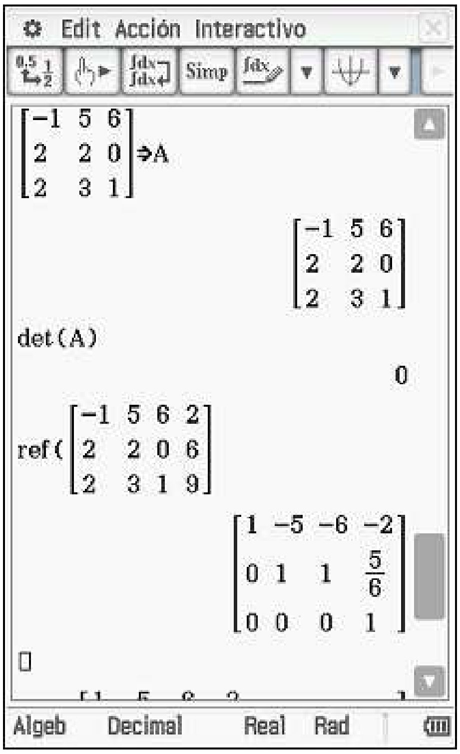
El sistema de partida és equivalent a : $\begin{cases} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \end{cases}$ que podrem resoldre en funció d'un paràmetre: $\begin{cases} 3y=1-4z \\ x+y=4 \end{cases}$ per qualsevol dels mètodes coneguts:




D'aquesta manera tenim que les solucions són:

$$\begin{cases} x=\dfrac{11+4\lambda}{3} \\ y=\dfrac{1-4\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \epsilon R$$

Per a α=2 analitzem de nou




Rang (A) = 2 < 3 = Rang ($\bar{A}$)

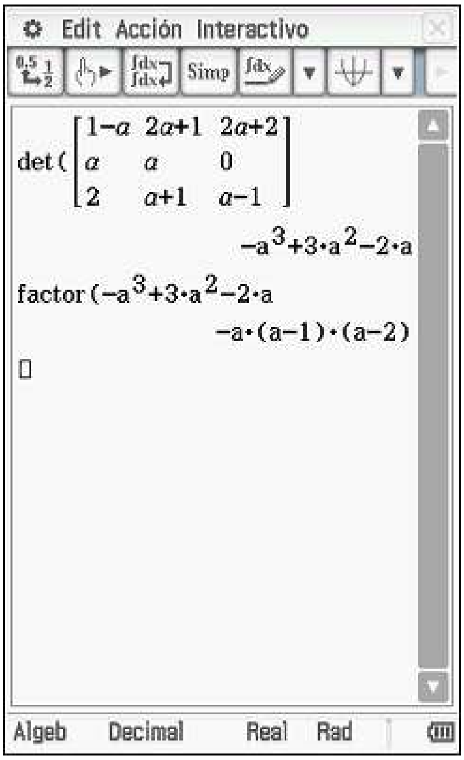
Per tant tenim un SISTEMA INCOMPATIBLE

(no té solució)

Per a que el sistema de partida siga COMPATIBLE DETERMINAT haurà de verificar-se que

Rang (A) = Rang ($\bar{A}$) = número d'incògnites = 3

Serà suficient aleshores veure quan det(A) ≠ 0




Una vegada fet el determinant de A podem resoldre factoritzant (Ruffini) i trobem les solucions:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

La resposta será per tant:

Si $\alpha \neq \{0,1,2\}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT

**2.- Es donen les rectes r:** $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ **i s:** $\begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

**Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

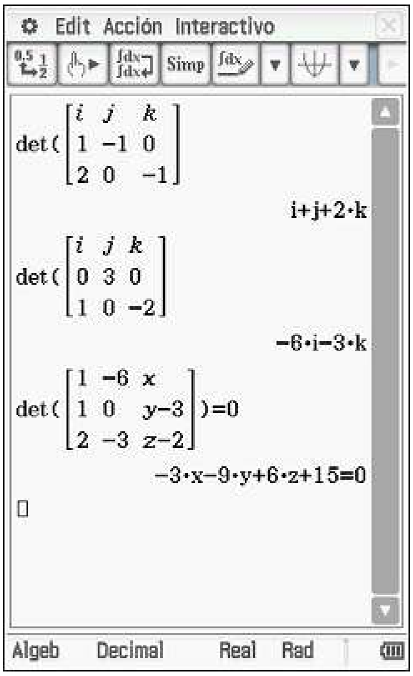
**a) El pla paral·lel a la recta s que conté la recta r**

**b) La recta t que passa pel punt (0,0,0) sabent que un vector director de t és perpendicular a un vector director de r i també és perpendicular a un vector director de s**

**c) Esbrineu raonadament si existeix o no un pla perpendicular a s que continga la recta r.**

Les rectes ens venen donades com a intersecció de dos plans. Calculem les respectives direccions a partir del producte vectorial dels vectors normals de cadascún.

En r: $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{n_2} = (2,0,-1) \end{cases}$ En s: $\begin{cases} \overrightarrow{n_3} = (0,3,0) \\ \overrightarrow{n_4} = (1,0,-2) \end{cases}$



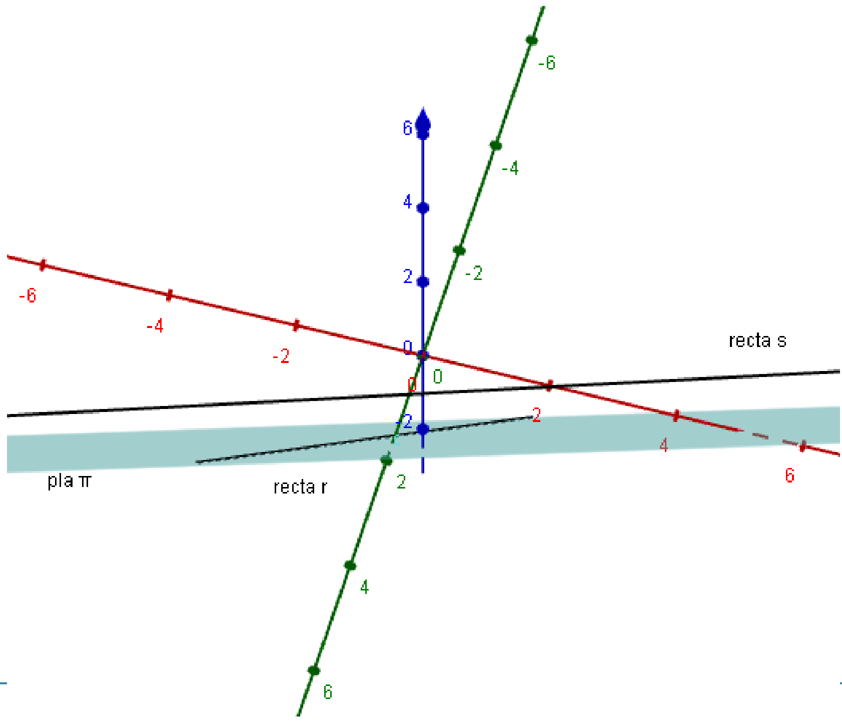

Tenim $\overrightarrow{d_r} = (1,1,2)$ i $\overrightarrow{d_s} = (-6,0,-3)$

El pla $\pi$ que busquem conté a la recta r aleshores podem calcular un punt:

Fent x = 0 per exemple es té y = 3 i z = 2

$\text{A} = (0,3,2) \epsilon\, \pi$

Calculem qualsevol de les equacions del pla a partir d'aquesta informació: π: - 3x - 9y + 6z + 15 = 0



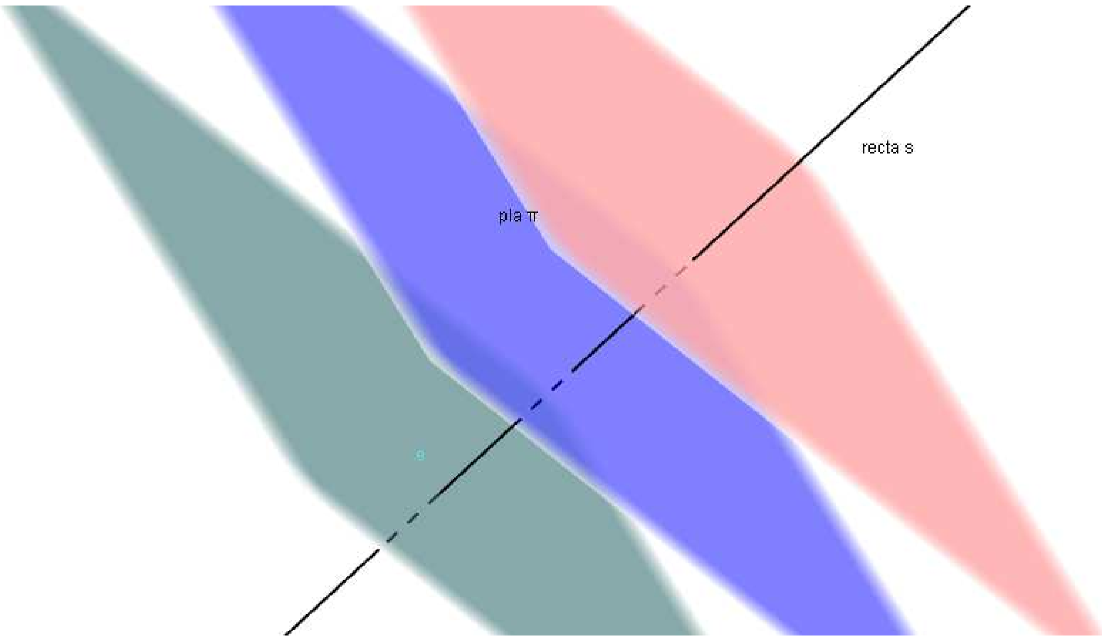
b) Si la direcció de la recta t $\overrightarrow{d_t}$ ha de ser perpendicular a $\overrightarrow{d_r}\ i\ \overrightarrow{d_s}$ utilitzarem el producte vectorial:

$$\overrightarrow{d_r}\, x\, \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3,-9,6)$$

Podem agafar aquest o un paral·lel simplificat: $\overrightarrow{d_t} = (1,3,-2)$ Com que passa per O = (0,0,0):

La recta t: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \quad \lambda \epsilon R \\ z = -2\lambda \end{cases}$

c ) Els plans perpendiculars a la recta s són de la forma: π: - 6x – 3z + D = 0




Per a que un pla d'aquestes característiques puga contindre la recta r el seu vector direcció ha de ser perpendicular a $\overrightarrow{d_s} = (-6,0,-3)$

Ho comprovem amb el producte escalar:

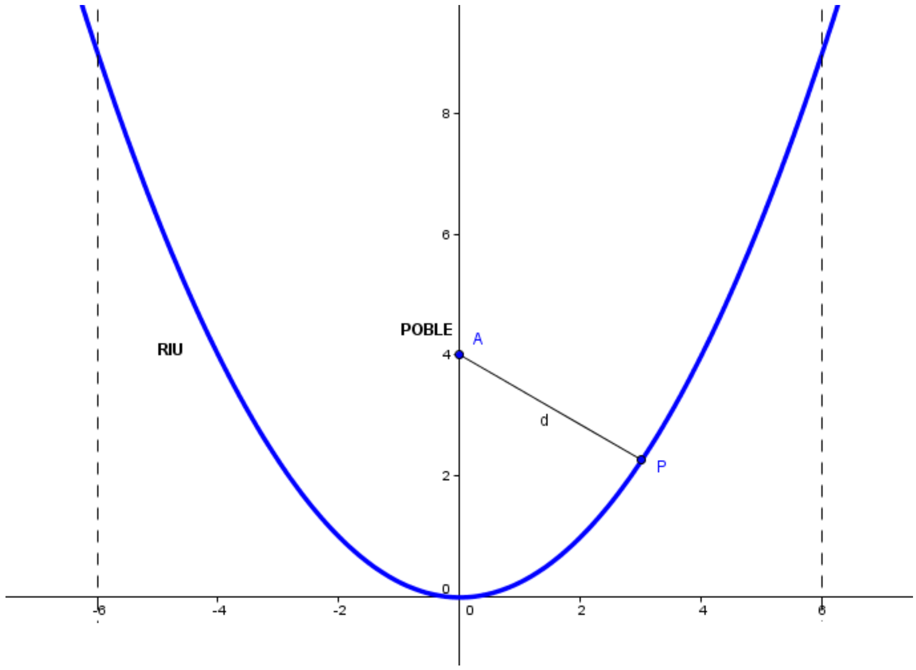
$\overrightarrow{d_r}\ .\ \overrightarrow{d_s} = (1,1,2).(-6,0,-3) = -12 \neq 0$

Aleshores la resposta és que no existeix un pla d'aquestes característiques.

**3.- Un poble està situat en el punt A = (0, 4) d'un sistema de referencia cartesià. El tram d'un riu situat al terme municipal del poble descriu la corba $y = \frac{x^2}{4}$, sent $-6 \leq x \leq 6$**

**Obteniu raonadament escrivint els passos del raonament utilitzat:**

a) **Distància entre un punt P=(x, y) del riu i el poble en funció de l'abscissa x de P**
b) **El punt o punts del tram del riu situats a distancia mínima del poble**
c) **El punt o punts del tram del riu situats a distancia màxima del poble**




La distancia entre A = (0, 4) i un punt qualsevol P = (x, y) que pertany a la parábola $y = \frac{x^2}{4}$

ve donat per:

A = (0, 4) i P = (x, $\frac{x^2}{4}$)

$$d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$$

Volem calcular el mínim I el màxim d'aquesta funció distancia en l'intérval $-6 \leq x \leq 6$

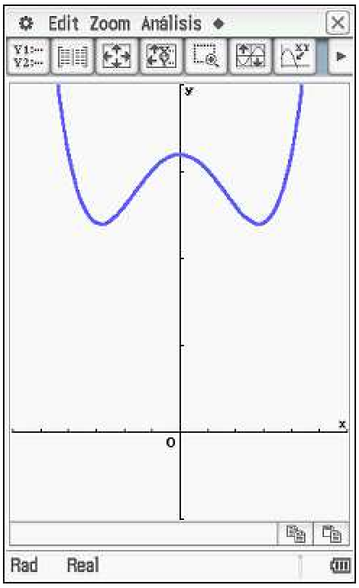
Podem utilitzar el seu quadrat que ens resultarà més senzilla.

$$f(x) = \frac{x^4}{16} - x^2 + 16$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{4} - 2x$$

Fem derivada primera igual a zero per trobar els punts crítics:

$$\frac{x^3}{4}-2x=0\ ;\ \ x\left(\frac{x^2}{4}-\mathbf{2}\right)=\mathbf{0}\ ;\ \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_1=0} \\ \frac{x^2}{4}-\mathbf{2}=\mathbf{0}\ \ ;\ \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_2=2\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{x_3=-2\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$




Analitzem la derivada segona en aquests valors trobats:

$$\boldsymbol{f''(x)}=\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}-2$$

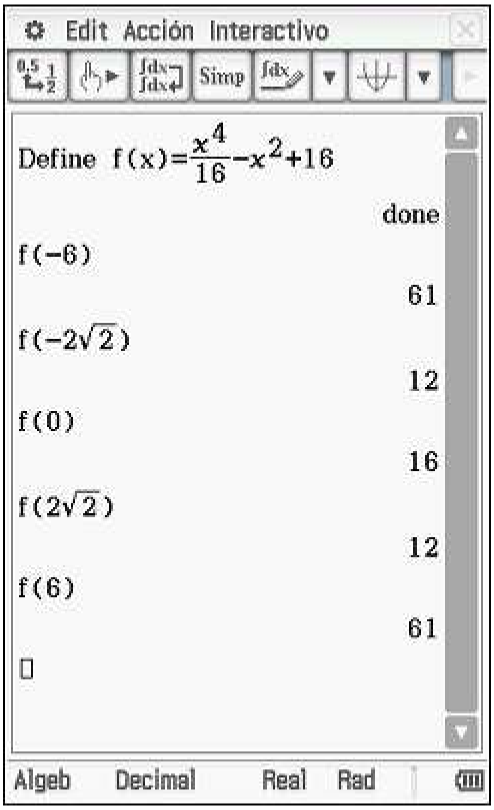
$\boldsymbol{f''}$**(0) = -2 < 0** en aquest valor s'alcança un màxim relatiu

$\boldsymbol{f''}$**(2$\sqrt{2}$) = 4 > 0** en aquest valor s'alcança un mínim relatiu

$\boldsymbol{f''}$**(-2$\sqrt{2}$) = 4 > 0** en aquest valor s'alcança un mínim relatiu

Estem treballant a l'intérval $-\mathbf{6}\leq\boldsymbol{x}\leq\mathbf{6}$ aleshores com que <u>f(x) continua i acotada en un intérval tancat</u> sabem que alcança un màxim i un mínim absoluts que trobarem entre els punts anteriors i els extrems de l'intérval de treball.

Calculem per tant el valor de la funció en tots aquets punts (Ja observe a la gràfica que el màxim relatiu no coincideix amb l'absolut)




Màxim absolut en x = - 6

Mínim absolut en x = - 2.83

Mínim absolut en x = 2.83

Màxim absolut en x = 6

Recorda que les distàncies serien justament l’arrel quadrada dels valors numèrics obtinguts ja que haven treballat amb el quadrat del mòdul.