CONTINUIDAD

Una **función es continua en un punto** si existe el límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto: $f(x)$ es continua en $x=a \iff \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. La continuidad implica y necesita que se cumplan tres condiciones: a) existe el límite de la función $f(x)$ en $x=a$; b) la función está definida en $x=a$, es decir, existe $f(a)$; c) los dos valores anteriores son iguales.

Si no se da alguna de estas condiciones, diremos que la función presenta una discontinuidad en $x=a$.

- Si existe límite y este es finito, pero no coincide con $f(a)$, o bien no existe $f(a)$, entonces diremos que la función tiene en $x=a$ una **discontinuidad evitable**.
- Si los límites laterales no coinciden en $x=a$, se dice que en dicho punto la función tiene una **discontinuidad de salto**, que puede ser finito o infinito.

DERIVADAS

La función f es **derivable** en el punto a si existe $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. A $f'(a)$ se le denomina derivada de f en a. También se escribe $D[f(a)]$.

Derivada lateral por la izquierda en a: $f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. **Derivada lateral por la derecha** en a: $f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Existe derivada de una función en un punto si y solo si existen derivadas laterales y son iguales. Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto. Se llama **función derivada** de f a aquella que asocia a cada x de su dominio su derivada $f'(x)$. Si f' es derivable, es posible obtener su derivada f'' y así sucesivamente. A las funciones f', f'', f''', f^{IV}, etc., se les llama **derivadas sucesivas** de la función f.

➤ Tabla de derivadas de las funciones elementales

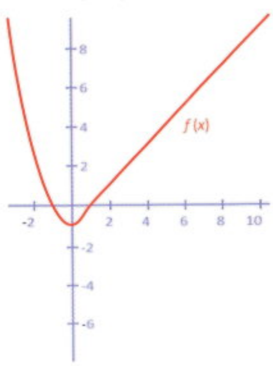
Función	Forma simple	Forma compuesta (útil para aplicar la regla de la cadena)	Ejemplos
Constante	$D[k]=0$		$D[5]=0$
Potencial	$D\left[x^n\right]=n\cdot x^{n-1}$ $D\left[\sqrt[n]{x}\right]=D\left[x^{1/n}\right]=\frac{1}{n}\cdot x^{1/n-1}=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\left[f^n\right]=n\cdot f^{n-1}\cdot f'$ $D\left[\sqrt[n]{f}\right]=\frac{f'}{n\cdot\sqrt[n]{f^{n-1}}}$	$D[x]=1$ $D\left[x^3\right]=3x^2$ $D\left[\frac{1}{x^4}\right]=D\left[x^{-4}\right]=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$ $D\left[\sqrt{x}\right]=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
Exponencial	$D\left[e^x\right]=e^x$ (base e) $D\left[a^x\right]=a^x\cdot\ln a$	$D\left[e^f\right]=e^f\cdot f'$ (base e) $D\left[a^f\right]=a^f\cdot\ln a\cdot f'$	$D\left[5^x\right]=5^x\cdot\ln 5$ $D\left[e^{x^2-x+1}\right]=e^{x^2-x+1}(2x-1)$
Logarítmica	$D[\ln x]=\frac{1}{x}$ $D[\log_a x]=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$D[\ln f]=\frac{f'}{f}$ $D[\log_a f]=\frac{f'}{f\cdot\ln a}$	$D\left[\log_2\sqrt{x}\right]=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\cdot\ln 2}$
Seno	$D[\operatorname{sen} x]=\cos x$	$D[\operatorname{sen} f]=f'\cdot\cos x$	$D\left[\operatorname{sen}(4x^2+x)\right]=(8x+1)\cdot\cos(4x^2+x)$
Coseno	$D[\cos x]=-\operatorname{sen} x$	$D[\cos f]=-f'\cdot\operatorname{sen} f$	$D\left[\cos e^{2x}\right]=-2\cdot e^{2x}\cdot\operatorname{sen} e^{2x}$
Tangente	$D[\operatorname{tg} x]=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$D[\operatorname{tg} f]=f'\cdot(1+\operatorname{tg}^2 f)=\frac{f'}{\cos^2 f}$	$D\left[\operatorname{tg}\sqrt{x}\right]=\frac{1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
Arco seno	$D[\operatorname{arcsen} x]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D[\operatorname{arcsen} f]=\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$D\left[\operatorname{arcsen}(2^{3x})\right]=\frac{3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2}{\sqrt{1-2^{6x}}}$
Arco coseno	$D[\arccos x]=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D[\arccos f]=\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$D[\arccos(\ln x)]=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}$
Arco tangente	$D[\operatorname{arctg} x]=\frac{1}{1+x^2}$	$D[\operatorname{arctg} f]=\frac{f'}{1+f^2}$	$D\left[\operatorname{arctg}(x^2-1)\right]=\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$

➤ Reglas de derivación

Operación	Regla de derivación	Ejemplos
Suma / resta	$(f\pm g)'=f'\pm g'$	$D\left[x^2-x+6-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right]=2x-1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
Producto por un número	$(k\cdot f)'=k\cdot f'$	$D\left[6e^x-3\ln x\right]=6e^x-\frac{3}{x}$ $D\left[5x^3-2x^2-9\right]=15x^2-4x$
Producto de funciones	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$	$D\left[e^x\cdot(3x^2-7x+1)\right]=e^x\cdot(3x^2-7x+1)+e^x(6x-7)=e^x\cdot(3x^2-x-6)$
Cociente de funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$	$D\left[\frac{x^2-2x}{x-1}\right]=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-(x^2-2x)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$
Composición de funciones (regla de la cadena)	$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$	$D\left[(-3x^2+1)^5\right]=5\cdot(-3x^2+1)^4\cdot(-6x)$ $D\left[\ln\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)\right]=\frac{x+4}{2x-3}\cdot\frac{2\cdot(x+4)-(2x-3)}{(x+4)^2}=\frac{11}{(2x-3)\cdot(x+4)}$

➤ Estudio de la continuidad y derivabilidad de una función definida a trozos: un ejemplo

Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.



a) Estudiemos su **continuidad**: las funciones parciales que forman f son polinómicas, luego son continuas en todo su dominio; debemos centrarnos en $x=1$.

Veamos si es continua en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2-1=1^2-1=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} x-1=1-1=0 \\ f(1)=1^2-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1.$$

Con ello, es continua en toda la recta real.

b) Estudiemos su **derivabilidad**: las funciones parciales son derivables, de manera que centraremos nuestro estudio en $x=1$.

Calculemos las derivadas laterales en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2\cdot 1=2 \\ f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} 1=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+)\not\Rightarrow \nexists f'(1).$$

f es derivable en toda la recta real, excepto en $x=1$, y su función derivada es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$