PROBLEMES OPTIMITZACIÓ

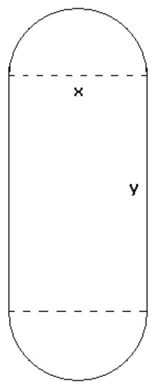
1.- Es vol construir un estadi tancat de $10.000\ m^2$ de superfície. L'estadi està format per un rectangle de base x i dos semicercles esteriors de diàmetre x, de manera que casa costat horitzontal del rectangle és diàmetre d'un dels semicercles. El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és d'1 euro i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és de 2 euros.

Es demana obtindre raonadament:

a) Longitud del perímetre del camp en funció de x.

b) El cost $f(x)$ de la tanca en funció de x.

c) El valor de x per a que el cost de la tanca siga mínim.




L'estadi que es vol construir respon a la figura.

El perímetre de la figura és $2y + 2\pi\frac{x}{2} = 2y + \pi x$ i la funció que volem minimitzar:

$1 \cdot 2y + 2 \cdot \pi x$

La superficie de l'estadi ha de ser $10.000\ m^2$ Aleshores es té que:

$$xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10000 \rightarrow y = \left(10000 - \pi\frac{x^2}{4}\right)/x = \frac{40000 - \pi x^2}{4x}$$

Si substituim en l'expressió que volem minimitzar ens queda una funció en una variable:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{40000 - \pi x^2}{4x} + 2\pi x = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + 2\pi x = \frac{40000 + 3\pi x^2}{2x}$$

Calculem la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{6\pi x \cdot 2x - (40000 + 3\pi x^2) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{6\pi x^2 - 80000}{4x^2} = \frac{3\pi x^2 - 40000}{2x^2}$$

Resoldrem $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\pi x^2 - 40000 = 0 \quad \rightarrow x = \sqrt{\frac{40000}{3\pi}} = 65.147\ m$

Estudiem la monotonia de la funció a la dreta i esquerra del valor crític trobat per veure si es tracta d'un mínim.

| | $x < 65.147\ m$ | $x = 65.147\ m$ | $x > 65.147\ m$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | $< 0$ | $=0$ | $> 0$ |
| | $\searrow$ | *Mínim* | $\nearrow$ |

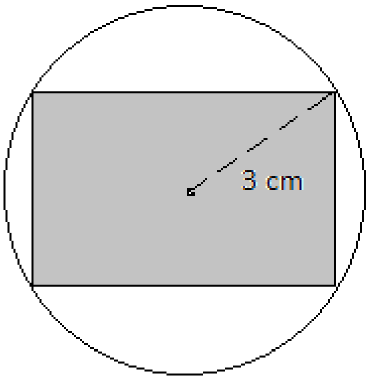
Calculem el valor de la variable $y$ :

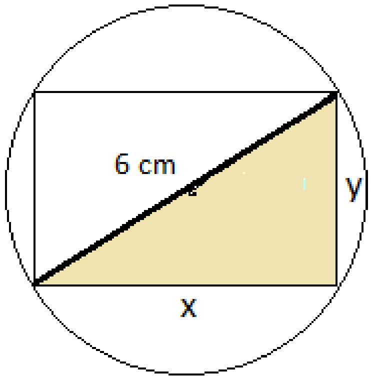
$y = \frac{40000 - \pi x^2}{4x} \quad \rightarrow y = \frac{40000 - \pi\left(\sqrt{\frac{40000}{3\pi}}\right)^2}{4 \cdot \sqrt{\frac{40000}{3\pi}}} = 102.33\ m$

El cost de la tanca serà: $f(x) = \frac{40000 + 3\pi x^2}{2x}$ en el punt $x = 65.147\ m$ :

$f(65.147) = \frac{40000 + 3\pi \cdot 65.147^2}{2 \cdot 65.147} = 614\ eur$

2.- Halla l'àrea màxima d'un rectangle que està inscrit en una circumferència de radi 3.




$f(x) = x \cdot y$

$6^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{6^2 - x^2}$

$f(x) = x \cdot y = x\sqrt{6^2 - x^2}$ que he de maximitzar

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{6^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{6^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{6^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{6^2 - x^2}} = \sqrt{6^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{6^2 - x^2}}$

$= \frac{6^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{6^2 - x^2}} = \boxed{\frac{36 - 2x^2}{\sqrt{6^2 - x^2}}}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{36 - 2x^2}{\sqrt{6^2 - x^2}} = 0 \iff 36 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ descartem la negativa
obviament pel context del problema en tractar-se x d'una longitud

$x = 3\sqrt{2} \quad \rightarrow y = \sqrt{36 - \left(\sqrt{18}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

Per tant el rectangle d'àrea màxima inscrit en la circumferència en realitat és un quadrat.

Cal comprovar que efectivament es tracta d'un màxim:

| | $x < 3\sqrt{2}$ | $x = 3\sqrt{2}$ | $x > 3\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $> 0$ | $0$ | $< 0$ |
| | *CREIXENT* | *MÀXIM* | *DECREIXENT* |