

2n BATXILLERAT CIÈNCIES: FUNCIONS

EXERCICI 3

Ens donen la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- Estudia creixement / decreixement i màxims / mínims
- Estudia concavitat / convexitat i punts d'inflexió.

a) Analitzem el domini de la funció. Tot i que tenim una fracció algebraica, fixa't que el denominador és sempre estrictament positiu i no s'anul·la

Aleshores $\text{dom}f(x) = \mathbb{R}$

Estudiem la derivada

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{Fem } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

I ara en una taula analitzem el signe de la derivada en els diferents intervals que se'ns generen.

Fixa't que el signe el determina el numerador ja que el denominador és sempre positiu.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0
$f(x)$	\searrow	<i>Min</i>	\nearrow	<i>Max</i>	\searrow

b) Pel que fa a la curvatura i als P.I. fem la segona derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x \cdot (1+x^2) \cdot [(1+x^2) + 2(1-x^2)]}{(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{-2x \cdot (3-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x \cdot (x^2-3)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Fem } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

I en una taula analitzem el signe de la segona derivada en els diferents intervals que se'ns generen.

De nou fixa't que el denominador és sempre positiu i que per tant el signe de la segona derivada ve determinat pel signe del numerador.

	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
$f(x)$	\cap	<i>P.I.</i>	\cup	<i>P.I.</i>	\cap	<i>P.I.</i>	\cup

Com que hi ha canvi en la curvatura en els tres candidats, tenim que efectivament són tres punts d'inflexió.

Observem la gràfica i comprovem que els resultats numèrics coincideixen.

