2n BATXILLERAT EXAMEN INTEGRALS

Amb el símbol ln *x* es representa el logaritme d'un nombre positiu *x* quan la base del logaritme és el número e. Siga *f* la funció que per a un nombre positiu *x* està definida per $f(x) = 4x\ln x$

Obtindre <u>raonadament</u>:

a) El valor de *x* on la funció *f* alcança el mínim relatiu.

b) L'equació de la recta tangent a la corba *y* = 4*x* ln *x* en el punt (1, 0).

c) L'àrea limitada entre les rectes *y* = 0, *x* = e i *x* = e^2 i la corba *y* = 4*x* ln *x*.

a) Per a calcular els punts crítics deriva la funció i iguala a zero:

$$f'(x) = 4\ln x + \frac{4x}{x} = 4\ln x + 4 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Cal comprovar si aquest valor és un mínim:

$f''(x) = \frac{4}{x} \to f''(e^{-1}) = \frac{4}{e^{-1}} = 4e > 0$. Aleshores es tracta d'un mínim.

b) La recta tangent a la corba $f(x) = 4x\ln x$ en (1, 0) tindrà com pendent la derivada de *f*(*x*) en aquest punt.

Per tant $m = f'(1) = 4\ln 1 + 4 = 4$.

La recta serà *y* = 4*x* + *n*. L'ordenada en l'origen la podem calcular substituint el punt de tangència en l'equació de la recta: 0 = 4 + *n*, per tant *n* = -4

Així, la recta tangent a *f*(*x*) en (1, 0) serà *y* = 4*x* – 4

c) La funció $f(x) = 4x\ln x$ sóls talla l'eix *X* en *x* = 0 i *x* = 1.

<u>En l'intérval comprés entre *x* = e i *x* = e^2 la funció és sempre positiva</u>.

Així doncs l'àrea limitada entre les rectes i la corba serà: $A = \int_e^{e^2} 4x\ln x\,dx$

Utilitzem el mètode d'integració per parts:

$$\begin{cases} \ln x = u \to \frac{1}{x}dx = du \\ 4x = dv \to 2x^2 = v \end{cases}$$

Substituim en la integral:

$$\int 4x\ln x\,dx = 2x^2\ln x - \int \frac{2x^2}{x}dx = 2x^2\ln x - \int 2x\,dx = 2x^2\ln x - x^2$$

Aleshores es té:

$$A = \int_e^{e^2} 4x\ln x\,dx = \left|2x^2\ln x - x^2\right|_e^{e^2} = 2e^4\ln e^2 - e^4 - \left(2e^2\ln e - e^2\right) = 4e^4 - e^4 - 2e^2 + e^2 = 3e^4 - e^2 \;;\; 156{,}4\ \text{u}^2$$

Siga *f* la funció definida per $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$. Obtindre raonadament:

a) El domini i les assímptotes de la funció *f* (*x*) .

b) Els intérvals de creiximent i decreiximent de la funció *f* (*x*) .

c) La integral $\int f(x)dx=\int \dfrac{x}{x^2-3x+2}dx$.

a) Si $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, el domini s'obté en igualar a zero el denominador…

$$x^2-3x+2=0 \rightarrow x_1=2, x_2=1$$

Per tant el domini seran tots els nombres reals menys *x = 2, x = 1*.

- Assímptotes verticals: *x = 2, x = 1*.
- Assímptotes horitzontals:

  $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3x+2}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-3x+2}=0$.

  Té una assímptota horitzontal en *y = 0*

- Assímptotes obliques: No en té ja que hem trobat una d'horitzontal.

b) Calculem els màxims i els mínims relatius:

$$f'(x)=\frac{x^2-3x+2-(2x-3)x}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{-x^2+2}{(x^2-3x+2)^2}=0\rightarrow -x^2+2=0\rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Estudiem el creiximent i el decreiximent de la funció tenint en compte els punts on falla el domini:

x		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		2	
$f'(x)$	–		+		+		–		–
$f(x)$	↘		↗		↗		↘		↘

Per tant $x=-\sqrt{2}$ és un mínim i $x=\sqrt{2}$ un màxim.

c) $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$

Per fraccions simples:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \rightarrow$$

$$x = A(x-2)+B(x-1) \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 2=B \\ x=1 \rightarrow -1=A \end{cases}$$

Així $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$

La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

Calcula el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

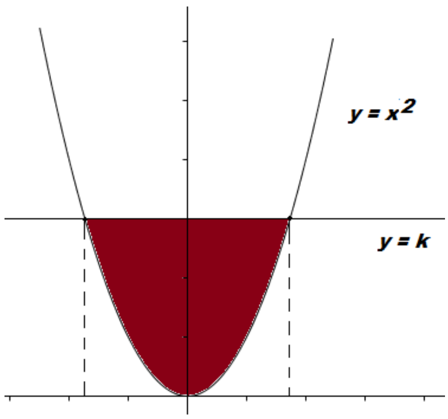
Troba el valor de k per a que l'àrea limitada siga $\sqrt{6}$ u^2.

Calculem els punts de tall entre la corba i la recta: $k = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

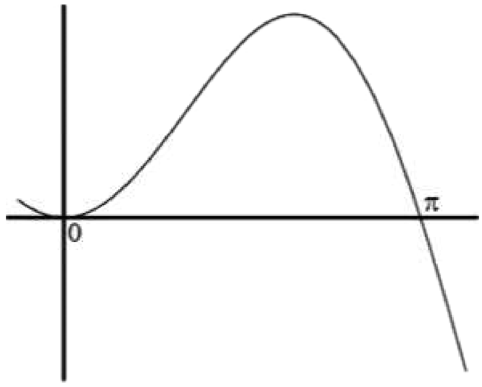
Donem l'àrea en funció del paràmetre.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{k}}(k-x^2)dx = 2\left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{k}} = 2\left(k\sqrt{k} - \frac{\sqrt{k}^3}{3}\right) = 2\cdot\frac{2k\sqrt{k}}{3} = \frac{4}{3}k\sqrt{k} \text{ u}^2$$

$$\frac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{16k^3}{9} = 6 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{54}{16}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$



Considerem la funció *f* (*x*) = *x* · sin(*x*)



Trobeu-ne una primitiva i aplica el resultat per calcular l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció *f* (*x*) i l'eix d'abscisses des de *x* = 0 fins a *x* = π.

Resoldrem la integral per parts, aplicant $\int u(x)dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)du(x)$, on:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$$

La integral queda: $\int x \operatorname{sen} x dx = -x\cos(x) + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$

La funció f(x)=x·sinx és sempre positiva en l'intérval [0, π] aleshores tidrem que:

$$A = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx = \left|-x\cos x + \operatorname{sen} x\right|_0^{\pi} = \left|-\pi\cos\pi + \operatorname{sen}\pi - (0\cos 0 + \operatorname{sen} 0)\right|_0^{\pi} = \pi \ \text{u}^2$$